ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ И АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

В. И. ДАНЧЕНКО, М. А. КОМАРОВ, П. В. ЧУНАЕВ

Аннотация. Наипростейшими дробями (НД) по предложению Е. П. Долженко в теории аппроксимаций называют логарифмические производные комплексных многочленов. С НД связано много решенных и нерешенных задач экстремального характера, восходящих к работам Дж. Буля, А. Дж. Макинтайра, У. Х. Дж. Фукса, М. Марстранда, Е. А. Горина, А. А. Гончара, Е. П. Долженко. В настоящее время многими авторами систематически развиваются методы аппроксимации и интерполяции посредством НД и некоторых их модификаций. Параллельно для НД возникают смежные задачи: неравенства разных метрик, оценки производных, разделение особенностей и др., представляющие самостоятельный интерес.

Во вводной части обзора в какой-то мере систематизированы известные авторам задачи такого рода, а в основной части сформулированы основные результаты и по возможности намечены методы их доказательств.

Содержание

1. Введение. История вопросов

Наипростейшими дробями (НД) порядка не выше $n = 0, 1, \dots$ называются рациональные дроби вида

$$(1) \qquad \rho_0(z) \equiv 0, \qquad \rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z,\, z_k \in \overline{\mathbb{C}},$$

где при $z_k = \infty$ считаем $\frac{1}{z-z_k} \equiv 0$. Очевидно, НД $\rho_n(z)$ является логарифмической производной многочлена $Q_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$, где при $z_k = \infty$ считаем $z - z_k \equiv 1$. Приведем краткую информацию об основных старых и новых задачах, связанных с НД, и современном состоянии теории НД.

1.1. **Оценки картановского типа.** Метрические свойста НД систематически начали изучаться в работах Дж. Буля [3], А. Дж. Макинтайра и У. Х. Дж. Фукса [18], Дж. М. Марстранда [19], А. А. Гончара [36–38], Е. П. Долженко [64–67]. Так или иначе, большинство исследований было связано с методом покрытий А. Картана [4]. Первые оценки картановского типа для НД были получены в [18]. При $\delta > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$E(\rho_n;\delta) = \{z:\ |\rho_n(z)| > \delta\}; \qquad L(\rho_n;\delta) = \inf \sum \operatorname{diam}(d_j),$$

где нижняя грань берется по всем конечным наборам кругов d_j, для которых $E(\rho_n;\delta) \subset \cup d_j$. В [18] показано, что независимо от расположения полюсов НД

$$L(\rho_n;\delta) \leqslant \mathrm{const}\cdot A(n)\,\delta^{-1}, \qquad \mathrm{const} > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

с $A(n) = n(1+\ln n)$. Если же все полюсы z_k лежат на прямой, то оценка (2) верна с $A(n) = n$ и она точна по порядку величины n (см. [3, 18]). Возник вопрос о точности величины $A(n)$ в общем случае [18]: нужен ли логарифмический множитель? Частично на этот вопрос дан ответ в [19], где приведен пример, когда справедлива оценка, противоположная (2) с $A(n) = n\sqrt{\ln n/\ln\ln n}$, $n \geqslant n_0$. В 2005 г. Дж. М. Андерсоном и В. Я. Эйдерманом [1, 26] была получена окончательная точная по порядку оценка (2) с $A(n) = n\sqrt{\ln n}$.

Разные модификации покрытий и оценок картановского типа применялись Е. П. Долженко [67], Н. В. Говоровым и Ю. П. Лапенко [34]; они сыграли важную роль в обратных теоремах теории рациональных аппроксимаций. Наиболее общие результаты по этой тематике недавно получены в работе В. Я. Эйдермана [106], где вместо НД оценивались потенциалы Коши $\int (z-\zeta)^{-1} d\mu(\zeta)$ с комплексной мерой μ.

1.2. **Задача Горина-Чебышева.** Другой круг задач для НД связан с проблемой Е. А. Горина [35] об оценке величин

$$d_n(\mathbb{R},p) = \inf\left\{Y(\rho_n):\ \|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})} = 1\right\}, \qquad 1 < p \leqslant \infty, \tag{3}$$

где $Y(\rho_n) = \min_{k=\overline{1,n}} |\operatorname{Im} z_k|$. Несложно проверить [47], что

$$d_n(\mathbb{R},p) = \inf_{\rho_n}\left\{Y(\rho_n)\|\rho_n\|^q_{L_p(\mathbb{R})}\right\}, \qquad p^{-1}+q^{-1} = 1,$$

где инфимум берется по всем НД вида (1), не имеющим полюсов на $\mathbb{R}$. Следовательно, задачу Горина можно интерпретировать как задачу о величине наилучшего приближения нуля (наименьшего уклонения от нуля) в метрике $L_p(\mathbb{R})$ в классе НД заданного порядка n, при условии, что все они имеют общий фиксированный полюс, например, $z_1 = i$. В этом смысле задача Горина является определенным аналогом классической экстремальной задачи Чебышева о наименьшем уклонении от нуля унитарного многочлена фиксированной степени.

Вопрос о принципиальной возможности оценки снизу для $d_n(\mathbb{R},\infty)$ величиной[1] $A(n) > 0$, зависящей лишь от n, был поставлен и положительно решен в 1962 г. Е. А. Гориным [35]. В 1965 г. Е. Г. Николаев [94] доказал, что

$$d_n(\mathbb{R},\infty) \geqslant 2\,(\sqrt{2}-1)^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

[1] Далее через $A(\cdot,\cdot,\dots)$ (с индексами и без них) обозначаются конечные положительные величины, зависящие лишь от указанных аргументов и, вообще говоря, различные в различных формулах.

Он также поставил вопрос о точности этой оценки и следующую проблему: вообще, стремятся ли $d_n(\mathbb{R},\infty)$ к нулю при $n\to\infty$? В 1966 г. существенное уточнение предыдущей оценки получено А. О. Гельфондом [33]:

$$d_n(\mathbb{R},\infty) > (17\ln n)^{-1}, \qquad n\geqslant n_0.$$

В. Э. Кацнельсон [69] получил некоторое уточнение этой оценки, но при том же логарифмическом порядке убывания миноранты. Вопросы, сформулированные Е. Г. Николаевым, оставались открытыми. В 1994 г. окончательный результат был установлен в [47]:

$$d_n(\mathbb{R},\infty)\asymp \frac{\ln\ln n}{\ln n}.$$

Кроме того, оказалось [47], что при конечных p величины $d_n(\mathbb{R},p)$ к нулю не убывают и

$$\inf_n d_n(\mathbb{R},p)\geqslant A(p), \qquad A(p):=2^{q/p}p^{-1}\sin^q(\pi p^{-1}). \tag{4}$$

Эта оценка была несколько уточнена в [29] (см. (10)); вопрос о точной величине $A(p)$ остается открытым.

Рассматривалась аналогичная задача для потенциала Коши $\int(z-\zeta)^{-1}d\mu(\zeta)$ неотрицательной борелевской меры μ, $\operatorname{supp}\mu\subset\mathbb{C}^+$, и получена оценка снизу усредненного расстояния от $\operatorname{supp}\mu$ до действительной оси [48].

1.3. **Модификации задачи Горина-Чебышева.** Рассматривались модификации задачи о $d_n(\mathbb{R},p)$ с заменой $\mathbb{R}$ на другие множества (окружности, отрезки, лучи, углы и др.). Наибольшую трудность представляют всегда оценки при $p=\infty$. В случае ляпуновских кривых γ получена слабая эквивалентность [49]: $d_n(\gamma,\infty)\asymp A(\gamma)n^{-1}\ln n$. В случае отрезка имеем $d_n([-1,1],\infty)\asymp n^{-2}\ln^2 n$ (см. [63]). В [89] получена оценка *снизу* такого же порядка в случае так называемых спрямляемых компактов[2]. Во всех этих случаях, как и в случае прямой, проблему можно трактовать как задачу Горина-Чебышева о НД, наименее уклоняющейся от нуля при условии закрепленности одного полюса. Такие экстремальные и близкие к экстремальным НД в разных метриках на $[-1,1]$ найдены в [7]. Представляет интерес и другая модификация задачи Горина-Чебышева о НД со свободными полюсами, наименее уклоняющейся от ненулевой константы. Вместо констант в этой задаче рассматривались и дробно-линейные функции [58, 76, 84, 86].

1.4. **Задача Гельфонда.** А. О. Гельфонд [33] рассматривал задачу об оценке расстояний $d_n'(\mathbb{R},\infty)$ типа (3), но с нормировкой производной: $\|\rho_n'\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\leqslant 1$. В [33] была получена оценка снизу для $d_n'(\mathbb{R},\infty)$, но довольно неточная, носящая скорее качественный характер. В [47] доказана слабая эквивалентность указанных расстояний с величиной $n^{-1/2}\ln n$, но при дополнительном условии, что все полюсы НД лежат в верхней полуплоскости. В общем же случае известно [61], что расстояния $d_n'(\mathbb{R},\infty)$ ограничены снизу величиной $\mathrm{const}\cdot\sqrt{n^{-1}\ln n}$, $n\geqslant 2$. Вопрос о точности по порядку остается открытым.

[2] Компакт K называется спрямляемым, если он не разбивает плоскость и существует такая положительная величина $a(K)<\infty$, что любые две его точки можно соединить кривой $L\subset K$ длины $\leqslant a(K)$.

1.5. **Неравенства разных метрик и оценки производных НД.** Оценки L_p-норм НД, зависящие явно от полюсов z_k, были найдены В. Ю. Протасовым, И. Р. Каюмовым, А. В. Каюмовой и др. [51, 70–73, 98]. Особый интерес представляют неравенства разных метрик (термин С. М. Никольского), т.е. оценки L_p-норм НД сверху через их L_r-нормы на разных множествах при различных $p > 1$ и $r > 1$. Для алгебраических и тригонометрических многочленов такого рода оценки на ограниченных промежутках $K \subset \mathbb{R}$ при $p > r$ (только этот случай и представляет интерес, т.к. при $p < r$ оценки получаются из неравенства Гельдера) хорошо известны благодаря классическим работам Д. Джексона, С. М. Никольского, Н. К. Бари, С. Б. Стечкина, В. В. Арестова, Л. В. Тайкова, Г. Сеге, А. Зигмунда, П. Л. Ульянова, М. К. Потапова, П. Борвейна, А. Ф. Тимана, И. И. Ибрагимова и многих других авторов (см., например, [28, 95, 99]). Напомним, что первым результатом такого рода является следующее неравенство Джексона-Никольского для алгебраических многочленов P_n степени $\leqslant n$:

$$\|P_n\|_{L_p(K)} \leqslant A(K,p,r) n^{2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)} \|P_n\|_{L_r(K)}, \qquad p > r \geqslant 1. \tag{5}$$

В отличие от случая многочленов, неравенства разных метрик для НД нелинейны относительно сравниваемых норм, содержательны и на бесконечных промежутках и при произвольном соотношении между p и r (при $p < r$ они также не являются тривиальными и не следуют из неравенства Гельдера даже на конечных промежутках) [57]. Приведем одно такое неравенство при $p = \infty$ [47]:

$$\|\rho_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant A(r) \cdot \|\rho_n\|^s_{L_r(\mathbb{R})}, \quad r > 1, \quad r^{-1} + s^{-1} = 1, \tag{6}$$

где $A(r) < 2r \sin^{-s}(\pi r^{-1})$. Отметим, что в данном случае оценка не зависит от порядка НД, однако такая зависимость появляется в случае $p < r$, а также при оценках на ограниченных множествах. Это неравенство распространялось на другие метрики и множества в работах [9, 57].

С неравенствами разных метрик тесно связаны оценки типа Маркова-Бернштейна для производных НД [47,49,51,57]. Например, в [57] показано, что если на $[-1, 1]$ НД ρ_n вещественнозначна и ее модуль ограничен единицей, то

$$\sqrt{1-x^2}|\rho_n'(x)| \leqslant n(1+\varepsilon_n), \qquad x \in [-1,1], \tag{7}$$

для некоторых положительных $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, причем оценка является точной по порядку величины n

1.6. **Интерполяция аналитических функций.** Установлено [53, 54, 60, 88], что *НД Паде* (НД n-кратной интерполяции с одним узлом) всегда существует и единственна. Предложены различные конструкции НД Паде и оценки погрешности. Например, в [60] применялось представление НД Паде в виде интеграла Эрмита, найдена явная формула для остаточного члена и получены его оценки.

В задаче интерполяции с *различными* узлами вопросы о разрешимости и единственности значительно усложняются и, вообще говоря, не имеют однозначного ответа. Связь особенностей этой задачи с алгебраической структурой интерполяционных таблиц исследовалась в [58,59,84] и других работах. Введено понятие *обобщенной* интерполяции таблиц, охватывающее и обычную интерполяцию [59, 80]. Наиболее общие результаты о существовании и единственности решения задачи интерполяции получены методом редукции к полиномиальной интерполяции [80].

1.7. **Аппроксимация посредством НД на компактах.** Указанные в §1.2 исследования привели к более общей задаче аппроксимации непрерывных функций на различных подмножествах комплексной плоскости. Независимо задача приближения аналитических функций в ограниченных жордановых областях G посредством НД возникла в работах Дж. Кореваара, Ч. Чуи и К. Шена [5,6,11]. В них была предложена специальная конструкция аппроксимирующих НД с полюсами на границах ∂G.

Одна из мотивировок аппроксимации посредством НД заключена в их простом и важном физическом смысле: они задают (с точностью до постоянных множителей и операции комплексного сопряжения) плоские поля различной природы, создаваемые равновеликими источниками, расположенными в точках z_k. В этом смысле задачу аппроксимации посредством НД можно интерпретировать как задачу о размещении источников z_k, создающих заранее заданное поле.

Систематическое изучение НД со свободными полюсами как аппарата приближения началось в 1999 г., когда был доказан аналог полиномиальной теоремы С. Н. Мергеляна [100, Д.1]: *для любого компакта K со связным дополнением любую непрерывную на K функцию, аналитическую во внутренних точках на K, можно сколь угодно точно приблизить посредством НД* [53,54]. При этом, как показал О. Н. Косухин [87], для широкого класса компактов и функций скорости равномерного приближения посредством НД и комплексных многочленов имеют одинаковый порядок. Это позволило О. Н. Косухину получить для НД ряд аналогов классических теорем Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В. К. Дзядыка, Дж. Л. Уолша. Из дальнейших исследований, однако, стало ясно, что имеются и значительные различия между аппроксимативными свойствами НД и полиномов (см. §8.1). Собственно, именно эти различия и вызывают дополнительный интерес к изучению НД.

Исследовались аппроксимативные свойства некоторых других конструкций основанных на НД. Например, в [49, 50, 60] введены дроби вида

$$\rho_n(p,z) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{z_k^{-p}}{z - z_k}, \qquad \Theta(z) = \frac{\rho_{n_1}(z) - \rho_{n_2}(z)}{\rho_{n_3}(z) - \rho_{n_4}(z)},$$

где p – целое число, $z_k \neq 0$, а при $z_k = \infty$ считаем, что соответствующее слагаемое $\equiv 0$, так что $\rho_n(z) = \rho_n(0,z)$, ρ_{n_k} — НД. Показано, что при $p \geqslant 0$ для дробей $\rho_n(p,z)$ также справедлив аналог полиномиальной теоремы Мергеляна. При $p < 0$ это уже неверно [50].

Что касается дроби Θ, то оказалось, что такое незначительное усложнение вида НД приводит к значительно более сильным аппроксимативным свойствам. Именно, любая рациональная функция R степени m при каждом натуральном q может быть приближена некоторой дробью Θ, в которой все n_k не превосходят qm, так, что [49, 60]

$$|\Theta(z) - R(z)| \leqslant 2e^{|R(z)|} \frac{|R(z)|^{q+1}}{q!} \qquad \text{при условии} \qquad |R(z)| \leqslant \frac{q}{5}.$$

Отсюда видно, что в общем случае скорость аппроксимации дробями Θ гораздо выше, чем многочленами (той же степени, что и Θ), и весьма близка по порядку к скорости аппроксимации рациональными функциями общего вида [49].

1.8. **Наилучшие приближения на отрезке действительно оси.** Рассматривалась задача о наилучшем приближении вещественных непрерывных функций на отрезках действительной оси посредством вещественнозначных НД. В работах [58,79,82] показано, что НД ρ_n наилучшего равномерного приближения вещественной константы при достаточно больших n единственна, имеет порядок n и характеризуется чебышевским альтернансом, состоящим из $n+1$ точек отрезка. Этот результат вполне аналогичен критерию наилучшего приближения посредством многочленов.

Однако, при аппроксимации произвольной непрерывной функции возможны существенные различия. Так, в отличие от случая многочленов, НД наилучшего приближения может быть не единственна; соответствующие примеры были построены в [58,74,78]. Эти примеры, кроме того, показывают, что, вообще говоря, не существует прямой связи между альтернансом и наилучшим приближением посредством НД.

Тем не менее, для достаточно широкого класса непрерывных функций установлен [12, 81] следующий аналог теоремы Чебышева об альтернансе: *НД наилучшего проиближения характеризуется альтернансом из $n+1$ точек отрезка $[-1,1]$ при условии, что ее порядок равен n и все полюсы лежат вне замкнутого единичного круга; при этом, дробь наилучшего приближения единственна.* Этот критерий усиливает предшествующий результат Я. В. Новака [97], где дополнительно требовались вещественность и попарное различие полюсов. (Я. В. Новак вопрос о единственности не исследовал.)

1.9. **Аппроксимация на неограниченных множествах.** В работах В. Ю. Протасова [98], П. А. Бородина и О. Н. Косухина [31,88], И. Р. Каюмова [70,71], В. И. Данченко [51] изучалось приближение посредством НД в разных метриках на неограниченных множествах: прямых, лучах и др. Например, установлено [31], что каждая непрерывная на действительной оси $\mathbb{R}$ функция с нулевым значением на бесконечности в равномерной метрике с любой точностью приближается НД. Аналогичное утверждение становиться неверным, если вместо прямой рассматривать неразвернутый угол [88].

В [30] показано, что при $p \in [2,\infty)$ НД всюду плотны в L_p на действительной полуоси $x \geqslant 0$. Однако в случае всей оси класс функций, аппроксимируемых посредством НД в $L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$, резко сужается [98], в частности, он состоит из тех и только тех функций, которые представляются в виде сходящихся к ним в $L_p(\mathbb{R})$ рядов НД.

Все эти результаты указывает, в частности, на своеобразную нелинейность процесса аппроксимации на неограниченных множествах и тесную связь с их геометрией.

1.10. **Ряды НД.** Работы по аппроксимации на неограниченных множествах в немалой мере способствовали возникновению теории рядов НД. Были найдены различные условия и критерии сходимости в $L_p(\mathbb{R})$ бесконечных НД ρ_∞ в терминах последовательностей их полюсов z_k (см. [51, 70, 71, 73, 98]). Например, при $1 < p < 2$ такая сходимость эквивалентна следующему условию из [51] для частичных сумм ρ_n вида (1): $\sup_n \sum_{k=1}^n |\rho_n(\overline{z_k})|^{p-1} < \infty$.

1.11. **Модификации НД.** Естественной модификацией НД являются так называемые *h-суммы* и *амплитудно-частотные суммы* (*операторы*), соответственно имеющие вид

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k h(\lambda_k z), \qquad z, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{C},$$

где h — аналитическая в окрестности начала функция. В виде h-суммы представляются НД, если взять, например, $h(z) = 1/(z-1)$, $\lambda_k = 1/z_k$. Эта связь явилась одной из мотивировок использования h-сумм в качестве аппарата аппроксимации [50]. Кроме того, как правило, непосредственное построение аппроксимирующих НД весьма сложно, поскольку аппроксимация проводится за счет правильного выбора полюсов, и часто нет простой, видимой связи между аппроксимативными свойствами НД и расположением ее полюсов. При работе с h-суммами появляется возможность применять более широкий набор методов комплексного анализа, что в ряде случаев значительно облегчает решение задач. Такие суммы эффективно использовались в численном анализе (А. В. Фрянцев [101–103], П. В. Чунаев и В. И. Данченко [60,104,105] и др.). Так, в работе [60] был предложен метод экстраполяции функций h их h-суммами. Ряд окончательных результатов о скорости и области сходимости экстраполяционных процессов установлен в [105]; там также продемонстрированы некоторые преимущества метода h-сумм перед классическими полиномиальными методами.

Амплитудно-частотные суммы применялись в [8,10,62] для $2n$-кратной Паде-интерполяции (в точке $z = 0$) индивидуальных аналитических функций, а также в качестве операторов дифференцирования, интерполяции, экстраполяции и др., действующих на определенных классах функций. Возможность построения нужной амплитудно-частотной суммы обусловлена разрешимостью ассоциированной с ней задачи дискретных моментов

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k^m = \alpha_m, \qquad m = 0, \ldots, 2n-1,$$

относительно неизвестных μ_k и λ_k с заданными правыми частями α_m.

Особую трудность и интерес представляет случай несовместных задач дискретных моментов, когда соответствующая им амплитудно-частотная сумма не может быть построена. Для преодоления этой трудности в [8] предложен метод аналитической регуляризации амплитудно-частотной суммы, состоящий в том, что к ней добавляется определенный бином вида $c_1 z^{n-1} + c_2 z^{2n-1}$. Оказывается, что правильный выбор параметров $c_{1,2}$ приводит к новой ассоциированной задаче дискретных моментов, которая уже регулярно разрешима, а в ряде прикладных задач допускает весьма простой явный вид решений. В результате регуляризации соответствующие «подправленные» интерполяционные формулы с n узлами $\lambda_k z$ становятся точными на многочленах степени $2n-1$, что в два раза выше порядка обычной n-узловой интерполяции.

Отметим еще, что амплитудно-частотные операторы являются естественным обобщением некоторых классических аппаратов приближения, таких как экспоненциальные суммы, тригонометрические полиномы, дроби Паде (см. [8]).

2. Задача Горина и родственные вопросы

2.1. Оценки мнимых частей полюсов НД, нормированных в метрике $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p \leqslant \infty$. Переформулируем задачу Е. А. Горина в несколько более общем виде. Через $H_p = H_p(\mathbb{C}^+)$ обозначим пространство Харди аналитических на $\mathbb{C}^+$ функций f,

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

При вещественных x через $f(x)$ обозначим некасательные угловые пределы функции $f \in H_p$ со стороны $\mathbb{C}^+$. Хорошо известно [32, 92], что $f(x)$ существуют почти всюду на $\mathbb{R}$, $f(x) \in L_p$ и $\|f\|_p = \|f\|_{H_p}$. Здесь и далее применяются обозначения $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$.

Через HL_n^p обозначим класс всех функций вида $\rho_n + f$, где ρ_n — НД (1) с полюсами $z_k \in \mathbb{C}^+$, а $f \in H_p$. Положим

$$d_n(\mathbb{R}, p) = \inf \{ Y(\rho_n) : \quad \|\rho_n + f\|_p \leqslant 1, \quad \rho_n + f \in HL_n^p \}, \qquad 1 < p \leqslant \infty. \tag{8}$$

(Мы сохраняем обозначение (3), хотя здесь оно имеет несколько иной смысл). Определение (8), как несложно проверить, можно переписать в виде [47]

$$d_n(\mathbb{R}, p) = \inf_{\rho_n + f \in HL_n^p} \left\{ Y(\rho_n) \|\rho_n + f\|_p^q \right\}, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

При конечных p величины $d_n(\mathbb{R}, p)$ к нулю не убывают. Это свойство вместе с оценкой снизу для $d_n(\mathbb{R}, p)$ получается из соотношения двойственности [32, 92]:

$$\inf_{f \in H_p} \|\rho_n + f\|_p = \sup_{g \in H_q, \, \|g\|_q \leqslant 1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) g(x) \, dx \right| = 2\pi \left| \sum_{k=1}^{n} g(z_k) \right| \right\}. \tag{9}$$

Действительно, пусть ρ_n — экстремальная НД (на которой достигается (8)), причем ближайший к действительной оси полюс есть iy_1, так что $y_1 = d_n(\mathbb{R}, p)$. Возьмем пробную функцию $g(z) = (z + ih)^{-1}$, где $h > 0$. Тогда, очевидно,

$$\left| \sum\nolimits_{k=1}^{n} g(z_k) \right| \geqslant (h + y_1)^{-1}, \qquad \|g\|_q = 2\pi \, A(p) \, h^{-1/p}.$$

Отсюда и (9) (где левая часть равна единице) имеем $(h + y_1)^{-1} < h^{-1/p} A(p)$. Взяв $h = y_1 (p-1)^{-1}$ и решив последнее неравенство относительно y_1, получим

$$y_1 = d_n(\mathbb{R}, p) \geqslant \frac{p-1}{p^{\,q}} \, A^{-q}(p), \qquad A(p) = \frac{1}{2\pi} h^{1/p} \|g\|_q. \tag{10}$$

Неравенство (10) другим способом найдено в [29], оно уточняет оценку (4).

Далее, если взять в качестве пробной функции какую-либо голоморфную на $\mathbb{C}^+$ ветвь $g(z) = (z + i)^{-\varepsilon - 1/q}$, то аналогичным методом можно получить [51]:

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} |z_k|^{-\varepsilon - 1/q} \leqslant A_0(p) \, \varepsilon^{-1/q}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{11}$$

Здесь показатель степени $(-1/q)$ справа в (11) нельзя увеличить. Приведем еще один результат [98], связанный с оценкой $d_n(\mathbb{R}, p)$ при конечных p:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^{1-p} \leqslant A(p) \, h_p^p \, \|\mathrm{Im}\, \rho_n\|_p^p, \qquad z_k = x_k + iy_k,$$

где h_p — норма оператора Гильберта (см. (58)).

В случае действительной положительной полуоси $\mathbb{R}^+$ при $1 < p < 2$ показано [29], что полюсы нормированной в $L_p(\mathbb{R}^+)$ НД ρ_n, расположенные на действительной отрицательной полуоси $\mathbb{R}^-$ (если такие имеются), отделены от нуля некоторой величиной $A(p) > 0$. Если же $p \geqslant 2$, то, по-видимому, такие полюсы могут подступать к нулю сколь угодно близко [29]. В общей постановке задача Горина для полуоси остается открытой.

В случае $p = \infty$ методы двойственности не работают и оценки $d_n(\mathbb{R}, \infty)$ значительно усложняются. Сформулируем соответствующий результат, разными способами полученный в [44–47].

Теорема 2.1. *Верны соотношения $d_n(\mathbb{R}, \infty) \asymp \ln\ln n/\ln n$ (двусторонние неравенства). Более точно, при достаточно больших n эти двусторонние неравенства справедливы с константами $1/9$ и 2.*

Теорема 2.1 легко распространяется на случай $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$ (см. [48]). Именно, пусть фиксированы некоторая прямая $L \subset \mathbb{R}^m$ и множество M_n, $n \in \mathbb{N}$, сумм вида

$$\varrho_n(x) = \varrho_n(x_1, \dots, x_n; x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{|x - x_k|^2}, \qquad x,\, x_k \in \mathbb{R}^m,$$

с нормировкой $\|\varrho_n\|_{C(L)} \leqslant 1$. Тогда для точной нижней грани $D_n(L)$ расстояний от всевозможных точек x_k до прямой L имеем $D_n(L) \asymp \ln\ln n/\ln n$. Действительно, оценки сверху $D_n(L)$ получается непосредственно из теоремы 2.1 (точнее, из примера, подтверждающего оценку сверху в теореме 2.1). Для оценки снизу можно провести симметризацию, добавив к множеству $\{x_k\}$ множество $\{x_k^*\}$, симметричное ему относительно L, а затем поворотом вокруг L переместить каждую пару x_k и x_k^* в пару комплексно сопряженных точек z_k, $\overline{z}_k$ некоторой фиксированной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащей L. Тогда sup-норма на $\mathbb{R}$ НД с полюсами $\{z_k\} \cup \{\overline{z}_k\}$ будет ограничена сверху удвоенной sup-нормой суммы ϱ_n на L. Остается воспользоваться нижней оценкой из теоремы 2.1.

2.2. **Оценки расстояний от полюсов НД до некоторых компактов.** Пусть K — компакт на $\mathbb{C}$, K^+ — наибольшая область из дополнения к K, содержащая бесконечно удаленную точку. Введем класс $SP_n(K)$, состоящий из функций $R_n = \rho_n + f$, где ρ_n – НД (1) с полюсами в K^+, а f — голоморфная и ограниченная на K^+ функция с $f(\infty) = 0$. При $m > 0$ через $\delta_n(K, m)$ обозначим расстояние до K от множества всевозможных полюсов функций $R_n \in SP_n(K)$ при условии нормировки

$$\|R_n\|_{\infty,K} := \limsup_{z \to K} |R_n(z)| \leqslant m. \tag{12}$$

Здесь в принципе можно обойтись нормировкой $\|R_n\|_{\infty,K} \leqslant 1$, поскольку задача (12) сводится к этому случаю заменой R_n на $m^{-1} R_n(m^{-1} z)$, но с другим компактом $m \cdot K$. Приведем некоторые оценки величин $\delta_n(K, m)$.

В случае окружности $\gamma_1 : |z| = 1$ имеем слабую эквивалентность (т.е. двустороннюю оценку) [47]:

$$\delta_n(\gamma_1, m) \asymp n^{-1}\ln n \quad \Leftrightarrow \quad A_1(m) n^{-1}\ln n \leqslant \delta_n(\gamma_1, m) \leqslant A_2(m) n^{-1}\ln n. \tag{13}$$

Отметим, что оценка сверху здесь получается с помощью простого примера $R_n^* = Q'/Q$, $Q(z) = z^n - (n+1)/m$. Из нижней оценки в (13) легко получается

нижняя оценка для замкнутой обобщенно ляпуновской кривой[3] γ [49]:

$$\delta_n(\gamma, m) \geqslant A(\gamma, m) n^{-1} \ln n, \qquad n \geqslant 2. \tag{14}$$

Действительно, пусть $z = \varphi(w)$ — какое-либо конформное однолистное отображение внешности единичного круга γ_1^+ на область γ^+ с условием $\varphi(\infty) = \infty$. Из результата С. Е. Варшавского [25] следует, что $|\varphi'(w)| \asymp 1$, $w \in \gamma_1^+$, где слабая эквивалентность зависит лишь от γ. Заметим, что

$$\varphi'(w) \cdot R_n(\varphi(w)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - z_k} + \varphi'(w) f(\varphi(w)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{w - w_k} + F(w),$$

где $z_k = \varphi(w_k)$, $F \in H_\infty(\gamma_1^+)$ и $F(\infty) = 0$. Отсюда и из (13) получается (14), поскольку из $|\varphi'(w)| \asymp 1$ имеем $|w_k| - 1 \asymp \operatorname{dist}(z_k, \gamma)$.

К случаю окружности сводится и оценка [63]

$$\delta_n([-1,1], m) \asymp n^{-2} \ln^2 n. \tag{15}$$

Действительно, пусть $R_n = \rho_n + f \in SP_n([-1,1])$, $\|R_n\|_{\infty,[-1,1]} \leqslant m$. При замене Жуковского $z = (w + 1/w)/2$, $z_k = (w_k + 1/w_k)/2$ (для определенности считаем, что $|w_k| > 1$), непосредственной проверкой убеждаемся в равенстве

$$\rho_n(z) = \frac{2w^2}{w^2 - 1} F(w), \qquad F(w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{w - w_k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{w_k}{w w_k - 1} - \frac{1}{w} \right). \tag{16}$$

Здесь $F \in SP_n(\gamma_1)$, а значит, и функция $\sigma(w) := R_n(z(w))(1 - w^2)/(2w^2)$ также принадлежит классу $SP_n(\gamma_1)$ и ее sup-норма на γ_1 не превосходит m. Из (13) имеем $\min_k |w_k| - 1 \geqslant b n^{-1} \ln n$ с некоторой величиной $b = b(m) > 0$. Таким образом, если выполнено (12), то полюсы НД ρ_n лежат во внешности эллипса (см. [49, 63])

$$z = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \cos t + \frac{i}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) \sin t, \tag{17}$$

с $a = 1 + b n^{-1} \ln n$. Отсюда получаем нужную оценку снизу. Оценку сверху получим, взяв для простоты изложения $m = 3$. Если в (16) числа w_k являются корнями уравнения $w^n - \omega = 0$ с некоторым $\omega > 1$, то после несложных преобразований получается

$$\rho_n(\omega; z) = \frac{2nw}{w^2 - 1} \frac{\omega(w^{2n} - 1)}{(w^n \omega - 1)(w^n - \omega)}, \quad z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right). \tag{18}$$

Множество полюсов НД $\rho_n(\omega; z)$ лежит на эллипсе (17) с $a = \sqrt[n]{\omega}$, причем два полюса, пусть $z_{1,2}$, вещественны. Возьмем $\omega = n^2$. Несложно убедиться, что $\max_{x \in [-1,1]} |\rho_n(n^2; x)| = |\rho_n(n^2; 1)| < 3$. Значит,

$$\delta_n([-1,1], 3) \leqslant ||z_1| - 1| = \frac{(a-1)^2}{2a} \sim 2 \frac{\ln^2 n}{n^2}.$$

О. Н. Косухин [89] оценку снизу в (15) распространил на случай спрямляемых компактов:

$$\delta_n(K, 1) \geqslant 4\, c(K) \frac{\ln^2 n}{n^2} (1 + o(1)), \qquad n \to \infty,$$

где $c(K)$ — гармоническая (логарифмическая) емкость компакта K.

[3] гладкой кривой, модуль непрерывности $\omega(s)$ угла наклона касательной к которой как функции длины s дуги удовлетворяет условию Дини $\int_0 s^{-1} \omega(s)\, ds < \infty$

2.3. **Задача Гельфонда об оценке мнимых частей полюсов НД с нормированными на $\mathbb{R}$ производными.** Задача о точном порядке величин

$$d'_n(\mathbb{R},\infty) = \inf\{Y(\rho_n):\ \|\rho'_n\|_\infty = 1\} = \inf_{\rho_n}\left\{Y(\rho_n)\sqrt{\|\rho'_n\|_\infty}\right\}$$

сформулирована А. О. Гельфондом [33] (вместе с аналогичными задачами с нормировками производных более высоких порядков). Эта задача еще не решена. В [33] показано, что $d'_n(\mathbb{R},\infty) \geqslant \lambda_0 2^{-n/4}$ с некоторой абсолютной постоянной $\lambda_0 > 0$. Введем сходные величины для НД (1), полюсы которых лежат в $\mathbb{C}^+$:

$$d_n^+(\mathbb{R},\infty) = \inf\left\{Y(\rho_n):\ \|\rho'_n\|_\infty = 1,\ \{z_k\}\subset\mathbb{C}^+\right\}.$$

В [47] показано, что справедливы следующие неравенства

$$\frac{1}{32}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leqslant d_n^+(\mathbb{R},\infty) \leqslant \frac{5}{4}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant n_0.$$

Используя последнюю оценку снизу, для общего случая можно доказать [61], что $d'_n(\mathbb{R},\infty) \succ \sqrt{n^{-1}\ln n}$. Вопрос о точности порядка миноранты остается открытым.

2.4. **Аналоги задачи Чебышева в случае отрезка.** Из (18), как несложно проверить, вытекает, что значения функции

$$\sqrt{1-x^2}\rho_n(\omega;x) = 2n\omega\,\frac{\sin n\varphi}{1-2\omega\cos n\varphi+\omega^2}, \qquad x=\cos\varphi,$$

альтернируют на отрезке $[-1,1]$, принимая в расположенных в порядке возрастания точках $x_k = \cos\varphi_k$, для которых $\cos(n\,\varphi_k) = 2\omega(\omega^2+1)^{-1}$, попеременно максимальные и минимальные значения, равные по модулю $q_n := 2n\omega(\omega^2-1)^{-1}$ (число точек альтернанса равно n). Положим

$$(19)\qquad \|f\| := \max_{x\in[-1;1]}|f(x)|, \quad \|f\|^* := \max_{x\in[-1;1]}\sqrt{1-x^2}\,|f(x)|, \quad f\in C([-1,1]),$$

В связи с указанным альтернансом возникает вопрос [49, 57]:

являются ли НД вида $\rho_n(\omega;z)$ экстремальными в задаче П.Л. Чебышева о НД порядка $\leqslant n$, наименее уклоняющихся от нуля по норме $\|\cdot\|^*$ при условии, что расстояние от их полюсов до отрезка $[-1,1]$ не превосходит заданной величины $\delta > 0$?

Этот вопрос остается открытым. Тем не менее при условии $\delta > \sqrt{2}-1$ положительный ответ на него получен в [7]: указанное наименьшее уклонение равно норме

$$(20)\qquad \|\rho_n(\omega;\cdot)\|^* = \frac{n}{\sqrt{T_n^2(1+\delta)-1}} \sim \frac{n}{T_n(1+\delta)}, \qquad n\to\infty, \quad \delta > \sqrt{2}-1,$$

при связи $2\delta+1 = \omega^{1/n}+\omega^{-1/n}$, где $T_n(z) = \cos(n\arccos z)$ — многочлены Чебышева первого рода. Пока не решена аналогичная задача о НД, наименее уклоняющихся от нуля по норме $\|\cdot\|$. Однако в [7] найдены НД близкие к экстремальным и, в частности, показано, что наименьшее уклонение e_n от нуля в классе всех НД, имеющих один из полюсов в точке $x = \delta+1$, при $\delta > \sqrt{2}-1$ удовлетворяет соотношению

$$e_n \sim \frac{2n}{T_n(\delta+1)-T_{n-2}(\delta+1)}, \qquad n\to\infty.$$

Другой аналог задачи Чебышева для НД со *свободными* полюсами — наилучшее приближение отличных от нуля констант — приведен в §8.2.

2.5. **Аналоги задачи Золотарева о разделении компактов.** Пусть K_1 и K_2 — произвольные непересекающиеся компакты на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Скажем, что K_1 и K_2 разделяются некоторой рациональной функцией $R_n(z)$ (степени не выше n), если

$$m := \min_{z\in K_1} |R_n(z)|, \quad \mu := \|R_n\|_{C(K_2)} > 0, \quad \sigma(K_1, K_2, R_n) := \frac{m}{\mu} > 1. \tag{21}$$

Задачу Е. И. Золотарева можно сформулировать следующим образом: получить из условия (21) какую-либо метрическую характеристику отдаленности компактов друг от друга. Такая характеристика должна зависеть только от n, μ, m. Первоначально задача формулировалась для двух отрезков K_1, K_2 действительной оси [68]. Для произвольных компактов со связными дополнениями она исследовалась А. А. Гончаром [39]. В работе [39] для гармонической емкости $c(K_1, K_2)$ конденсатора (K_1, K_2) с условиями (21) доказано неравенство

$$c = c(K_1, K_2) \leqslant n \ln^{-1}\, \sigma(K_1, K_2, R_n). \tag{22}$$

Эта оценка точна [39]: при любом малом $\varepsilon > 0$ существует рациональная функция R_n достаточно высокой степени такая, что $\sigma(K_1, K_2, R_n) \geqslant \exp\left(n(c+\varepsilon)^{-1}\right)$. Отсюда также следует, что любые непересекающиеся компакты K_1 и K_2 на $\overline{\mathbb{C}}$ со связными дополнениями разделяются некоторой рациональной функцией достаточно высокой степени.

В некоторых случаях из (21) или (22) можно получить оценку эвклидова расстояния $\operatorname{dist}(K_1, K_2)$ между K_1 и K_2. Например, в случае вещественных отрезков $K_1 = [-1, -\delta]$, $K_2 = [\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$, из (21) имеем оценку [39, 68]:

$$\delta > \exp(-\pi^2 n \cdot \ln^{-1} \sigma(K_1, K_2, R_n)) \tag{23}$$

для любой рациональной функции R_n, разделяющей эти отрезки [39]. В общем случае из (21) оценку $\operatorname{dist}(K_1, K_2)$ получить невозможно, и применяются оценки определенных усредненных расстояний.

Однако при $R_n = \rho_n$ оценки $\operatorname{dist}(K_1, K_2)$ часто имеют место, причем при $m = \sigma(K_1, K_2, \rho_n) = \infty$ получаем рассматривавшуюся в §2.2 задачу о расстоянии от полюсов НД до компакта K_2 при условии нормировки (12).

Приведем один результат. Если K_2 — континуум диаметра $\geqslant 1$, а K_1 — произвольный компакт, то из (21) следует [52]:

$$\ln\left(1 + \frac{A(\mu)}{\operatorname{dist}(K_1, K_2)}\right) < \mathrm{const} \cdot n\, \frac{\sigma^2}{\sigma^{3/2} - 1}.$$

Заметим, что при малых положительных $\sigma - 1$ отсюда получается оценка того же порядка, что и в (23).

В [49] рассматривался еще один вариант задачи Золотарева. Его можно сформулировать следующим образом. При $\delta \in (0, 1/2)$ положим

$$\lambda_n(\delta) = \sup_{\rho_n} \left\{ \frac{\min\{|\rho_n(x)| :\ x \in [-1+\delta, -\delta]\}}{\max\{|\rho_n(x)| :\ x \in [\delta, 1-\delta]\}} \right\}$$

где sup берется по всем НД (1), имеющим степень не выше n. Требуется найти точный порядок роста величин $\lambda_n(\delta)$ при $n \to \infty$. Этот вопрос остается открытым, здесь же приведем некоторые оценки.

Пример (18) показывает, что $\lambda_n(\delta)$ при любом фиксированном δ растет быстрее любой степени n^α, $\alpha > 1$. Действительно, пусть $\omega = n^\alpha$. Полюсы НД (18) лежат на эллипсе (17) с $a = \sqrt[n]{\omega}$ и, следовательно, они лежат в b_n-окрестности отрезка $[-1, 1]$, где $b_n = 2\alpha n^{-1}\ln n$ при $n \geqslant n_0$. Кроме того, из (20) имеем $\|\rho_n(\omega; \cdot)\|^* \leqslant 3n^{1-\alpha}$.

Далее, НД $\rho(x) = 2\rho_n(\omega; 2x-1)$ обладает аналогичными свойствами по отношению к отрезку $[0, 1]$: ее полюсы лежат в $(b_n/2)$-окрестности отрезка $[0, 1]$ и $|\rho(x)| \leqslant 6n^{1-\alpha}(\delta(1-\delta))^{-1/2}$ на $[\delta, 1-\delta]$. Из первого свойства следует, что при достаточно больших n функция $|\rho(x)|$ монотонно возрастает на $[-1, -\delta]$ и ее минимальное значение $|\rho(-1)| > n/2$. Таким образом, $\lambda_n(\delta) \geqslant A(\delta)n^\alpha$.

3. Неравенства разных метрик (задача Никольского) для НД

Результаты, связанные с аппроксимацией в L_p и с рядами НД, опираются в основном на оценки L_p-норм НД. Такие оценки были найдены в [70–73, 98], все они выражаются явно через полюсы НД. Возникает интерес к задачам другого типа — оценкам L_p-норм НД через их L_r-нормы на разных множествах при различных $p > 1$ и $r > 1$. Впервые такие задачи на определенных классах функций (алгебраические и тригонометрические многочлены, целые функции экспоненциального типа и др.) рассматривали Д. Джексон (1933) и С. М. Никольский (1951). Термин «неравенства разных метрик» предложен в [95].

3.1. **Оценки на действительной оси.** Как и выше будем применять обозначения $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$, $p \in (1, \infty]$. Пусть

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{z - \overline{z}_k}, \qquad z_k \in \mathbb{C}^+.$$

При фиксированном $\varphi \in (0, 2\pi)$ через $t_s = t_s(\varphi)$, $-\infty < t_1 < \ldots < t_{2n} < \infty$, обозначим корни уравнения $B_n^2(x) = e^{i\varphi}$. Будем называть их точками насечки. Положим

$$\mu_n(z) = \operatorname{Im}\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y}{|z - z_k|^2}, \quad \nu_n(z) = \operatorname{Re}\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{|z - z_k|^2}. \tag{24}$$

Отметим равенство $2\mu_n(x) = (\arg B_n(x))'$. В [51] получены точные квадратурные формулы для норм ρ_n, μ_n в L_2 с квадратурными узлами в точках насечки:

$$2\|\mu_n\|_2^2 = \|\rho_n\|_2^2 = \pi \sum\nolimits_{s=1}^{2n} \frac{\nu_n^2(t_s)}{\mu_n(t_s)} = \pi \sum\nolimits_{s=1}^{2n} \mu_n(t_s), \tag{25}$$

$\varphi \in (0, 2\pi)$ и $t_s = t_s(\varphi)$. Отсюда легко получить двустороннюю оценку [57]

$$(2n)^{-1} \|\rho_n\|_2^2 < \pi \|\rho_n\|_\infty < 2 \|\rho_n\|_2^2. \tag{26}$$

Действительно, из (25) имеем

$$\pi \sum\nolimits_{k=1}^{2n} |\nu_n(t_k)| \leqslant \sqrt{\pi \sum\nolimits_{k=1}^{2n} \nu_n^2(t_k)\mu_n^{-1}(t_k)} \sqrt{\pi \sum\nolimits_{k=1}^{2n} \mu_n(t_k)} = \|\rho_n\|_2^2,$$

откуда с учетом (25) получаем

$$\|\rho_n\|_2^2 \leqslant \pi \sum\nolimits_{k=1}^{2n} |\rho_n(t_k)| \leqslant \pi \sum\nolimits_{k=1}^{2n} (|\nu_n(t_k)| + \mu_n(t_k)) \leqslant 2\|\rho_n\|_2^2.$$

Отсюда сразу следует первое неравенство в (26). Выбрав φ так, чтобы в одной из точек $t_k(\varphi)$ функция $|\rho_n(x)|$ принимала наибольшее значение, получим и второе неравенство в (26). Во втором неравенстве в (26) множитель 2, а в первом неравенстве множитель 2^{-1} нельзя заменить единицами [57]. Оценку (6), а также вторую оценка в (26) можно обобщить на другие метрики [57]: при $1 < r < p \leqslant \infty$

$$(27) \qquad \|\rho_n\|_p^q \leqslant A(p,r)\, \|\rho_n\|_r^s, \qquad \text{где} \qquad p^{-1}+q^{-1}=1, \quad r^{-1}+s^{-1}=1.$$

Открыт вопрос о точном множителе $A(p,r)$.

В отличие от случая многочленов, в оценку (27) сравниваемые нормы входят нелинейно. Это естественно, поскольку при преобразовании $\tilde{\rho}_n(x) := a\rho_n(ax)$, $a > 0$, сохраняющем вид НД, оцениваемые выражения зависят от a линейно: $\|\tilde{\rho}_n\|_p^q = a\|\rho_n\|_p^q$.

В следующих неравенствах на соотношение между параметрами p и r никаких ограничений не накладывается. Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $1 < r < \infty$, E — произвольный ограниченный или неограниченный промежуток на $\mathbb{R}$. Тогда [57]

$$\|\rho_n\|_{L_p(E)}^q \leqslant A(p)\cdot n^{q/p}\, \|\rho_n\|_{L_\infty(E)}, \qquad \|\rho_n\|_p^q \leqslant A(p,r)\, n^{q/p}\, \|\rho_n\|_r^s.$$

Отметим, что $A(p)$ не зависит от E. Здесь в первом неравенстве порядок множителя $n^{q/p}$ является точным, а второе неравенство точным не является. При $p > r$ это следует из (27), но и при $p < r$ оно, по-видимому, может быть улучшено заменой показателя степени q/p на $(q/p)-(s/r)$.

3.2. **Оценки на отрезке.** Пусть все полюсы НД (1) лежат вне отрезка $[-1,1]$ симметрично относительно действительной оси (т.е. НД вещественнозначна на $\mathbb{R}$). Тогда (обозначение норм см. в (19)) при $p > r > 1$ и достаточно больших $n \geqslant n_0(\|\rho_n\|^*)$ имеем [57]

$$(28) \qquad \|\rho_n\| \leqslant 64\, n^{2/r}\, \|\rho_n\|_{L_r[-1,1]}, \qquad \|\rho_n\|_{L_p[-1,1]} \leqslant A(p)\, n^{2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}\, \|\rho_n\|_{L_r[-1,1]}.$$

Можно взять, например, $n_0(x) = 10^3(x^2+1)$. Оценки точны по порядку: при $r > 2$, $p = \infty$ существует последовательность вещественнозначных НД $\tilde{\rho}_n$ с $\|\tilde{\rho}_n\| \asymp 1$, для которых выполняются неравенства, противоположные (28). Оценки (28) по форме аналогичны оценке для многочленов (см. (5)). Однако здесь дополнительно накладывается ограничение на величину n. Это связано с несовпадением «размерностей» сравниваемых величин. Наиболее естественной (т.е. без каких-либо условий на n) в данном случае представляется оценка вида

$$\|\rho_n\|_{L_p[-1,1]}^q \leqslant A(r)\, n^{\vartheta}\, \|\rho_n\|_{L_r[-1,1]}^s, \quad p^{-1}+q^{-1}=1, \quad r^{-1}+s^{-1}=1,$$

с некоторой величиной $\vartheta = \vartheta(p,r)$ (вопрос открыт).

3.3. **Оценки на окружности.** Пусть все полюсы НД (1) лежат во внешности окружности $\gamma_r:\ |z| = r$. Тогда при $s \in \mathbb{N}$ справедлива оценка [9]

$$\|\rho^{(s-1)}\|_{L_\infty(\gamma_r)} \leqslant \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi r}}\|\rho^{(s-1)}\|_{L_2(\gamma_r)}\sqrt{2\|\rho_n\|_{L_\infty(\gamma_r)}+n}.$$

Отсюда с помощью неравенства Гельдера можно получить аналогичную оценку с заменой L_2 на L_p, $p > 2$.

4. Неравенства Маркова-Бернштейна для производных НД

Оценки производных функций разных классов — одна из наиболее известных классических экстремальных задач, возникающих, например, в теории полиномиальных и рациональных аппроксимаций. Обширная библиография по этой тематике имеется в [28,67,99]. Для НД оценки производных получены в [49,57]. Приведем несколько таких оценок.

4.1. **Оценки на действительной оси.** Пусть полюсы НД $\rho_n(z)$ лежат на $\mathbb{C}^+$. Тогда (см. обозначение (24))

$$|\rho_n'(x)| \leqslant (|\rho_n(x)| + \|\rho_n\|_\infty)\ \mu_n(x), \quad |\nu_n'(x)| \leqslant (|\mu_n(x)| + \|\mu_n\|_\infty)\ \mu_n(x),$$

$$|\mu_n'(x)| \leqslant \chi(x), \quad |\rho_n'(x)| + |\mu_n'(x)| \leqslant 2\,\chi(x), \tag{29}$$

где $\chi(x) := (|\nu_n(x)| + \|\nu_n\|_\infty)\ \mu_n(x)$. При этом соотношения в (29) обращаются в равенства для любой НД первого порядка (первое – в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$, а второе — всюду на $\mathbb{R}$).

4.2. **Оценки на окружностях и отрезках.** Пусть $r > 0$ и полюсы НД (1) лежат во внешности окружности $\gamma_r :\ |z| = r$. Тогда имеем точную оценку

$$\|\rho_n'\|_{C(\gamma_r)} \leqslant \|\rho_n\|_{C(\gamma_r)} \left(nr^{-1} + 2\|\rho_n\|_{C(\gamma_r)}\right).$$

В дополнение к (7) при тех же условиях на НД приведем другую точную по порядку оценку (см. обозначение (19)) [49]

$$(1 - x^2)|\rho_n'(x)| \leqslant |x\rho_n(x)| + n\|\rho_n\|^*(1 + \varepsilon_n), \qquad \varepsilon_n \to 0.$$

5. Разделение особенностей НД

Пусть K — компакт на $\mathbb{C}$. Для класса $SP_n(K)$ функций $\rho_n + f$ с нормировкой (12) положим

$$\theta_n(K, m) = \sup\{\|\rho_n\|_{\infty,K} : \quad \|\rho_n + f\|_{\infty,K} \leqslant m,\ \ \rho_n + f \in SP_n(K)\}. \tag{30}$$

Задача о разделении особенностей функций в классе $SP_n(K)$ состоит в оценке сверху величины $\theta_n(K, m)$, или, другими словами, в оценке норм компонент ρ_n и f через норму всей функции $\rho_n + f$.

Хорошо известна аналогичная задача для более широкого класса функций, имеющих вид $r_n + f$, где r_n — рациональные функции общего вида степени $\leqslant n$, а f — те же, что и в $SP_n(K)$. В этом классе через $\theta_n^*(K, m)$ обозначим величину, аналогичную (30) с заменой ρ_n на r_n. В этом случае можно взять $m = 1$, поскольку $\theta_n^*(K, m)$, в отличие от $\theta_n(K, m)$, зависит от m линейно.

Впервые задача о разделении особенностей появилась, по-видимому, в работе [69] В. Э. Кацнельсона в 1967 г. Из его результатов следует, что когда $K = \gamma_1$ — единичная окружность, то $\theta_n^*(\gamma_1, 1) \leqslant A\,n^2$. В ряде последующих работ рассматривались более общие компакты K, но оценка оставалась по порядку той же (А. М. Бочтейн, В. Э. Кацнельсон, С. И. Пореда, Е. Б. Сафф, Г. С. Шапиро, А. А. Гончар, Л. Д. Григорян и др.; соответствующая библиография имеется в [40, 41, 43]). Позже Л. Д. Григорян [42] существенно понизил порядок мажоранты в случае гладких кривых $K = \gamma$: $\theta_n^*(\gamma, 1) \leqslant A(K)\,n$. Он же показал, что порядок оценки точный. Окончательно в [43] такая оценка установлена для произвольного компакта K с устранением зависимости A от K.

Возникает аналогичная задача для НД. Естественно ожидать, что порядок роста $\theta_n(K,m)$ относительно n должен быть значительно меньше порядка роста $\theta_n^*(K,m)$. Для произвольных компактов K вопрос оценки $\theta_n(K,m)$ остается открытым. В простейших случаях (окружности, ляпуновские замкнутые кривые и др.) оказалось, что порядок роста логарифмический, и этот порядок точный. Например, в случае $K=\gamma_1$ имеем $\theta_n(K,m)\leqslant 3\ln(n+1)m$ при $n\geqslant n_0(m)$ [49].

Аналогичную задачу об оценке компонент можно ставить на неограниченных множествах и в разных метриках; простейший случай см. (60), (61) в §9.1.

6. Интерполяция посредством НД

6.1. Задача интерполяции посредством НД. Примеры. Рассмотрим задачу построения НД ρ_n порядка $\leqslant n$, удовлетворяющую равенствам

$$\rho_n^{(s)}(\xi_j)=b_{j,s},\quad \xi_j,b_{j,s}\in\mathbb{C}\qquad (j=\overline{1,k},\ s=\overline{0,m_j-1},\ m_j\geqslant 1,\ m_1+\ldots+m_k=M),\tag{31}$$

где $\xi_1,\ldots,\xi_k$ — различные узлы, $m_1,\ldots,m_k$ — их кратности, M — суммарная кратность узлов, а $b_{j,s}$ — заданные значения. В случае $M<n$ либо $M>n$ будем называть задачу (31) соответственно *неполной* либо *переопределенной* задачей интерполяции. Случай $M=n$ для нас является основным. В этом случае, если не оговорено противное, мы будем называть (31) просто *задачей интерполяции* (иногда для уточнения будем применять термин «*полная* задача интерполяции»).

Если все узлы в (31) *простые* (однократные), то приходим к задаче *простой* интерполяции:

$$\rho_n(\xi_j)=b_j,\qquad j=\overline{1,M}.\tag{32}$$

В противном случае (31) называется задачей *кратной* интерполяции. При интерполяции регулярной функции f в (31) и (32) естественным образом полагают $b_{j,s}=f^{(s)}(\xi_j)$, $b_j=f(\xi_j)$.

Как известно, в классе алгебраических полиномов степени $\leqslant n-1$ полная задача интерполяции вида (31) всегда имеет решение, причем единственное. Напротив, интерполяционная НД может не быть единственной или не существовать. Первые примеры неединственности были опубликованы Е. Н. Кондаковой [84] и Я. В. Новаком [97] для случая задачи (32) при $n=2$.

Пример 6.1 [97]. Для таблицы $\{(-1;-1),(1;1)\}$ существует бесконечно много интерполяционных НД порядка $\leqslant 2$:

$$\frac{1}{z},\qquad \rho_2(z;\alpha):=\frac{2z+\alpha}{z^2+\alpha z+1},\qquad \alpha\neq\pm 2.$$

Пример 6.2 [58,80]. Приведем пример неразрешимой полной задачи интерполяции. Для следующей таблицы

$$(-\sqrt{2},-3\sqrt{2}),\quad (-1/\sqrt{3},-\sqrt{3}),\quad (0,1),\quad (1/\sqrt{3},\sqrt{3}),\quad (\sqrt{2},3\sqrt{2}),$$

не существует интерполяционных НД порядка $\leqslant 5$. Действительно, если существует такая НД $\rho_5:=Q'/Q$, то необходимо $Q'(0)=Q(0)\neq 0$, и, не нарушая общности, мы можем искать Q в виде $Q(z)=1+a_1z+\ldots+a_5z^5$. Но тогда из равенств $\rho_5(\pm\sqrt{2})=\pm 3\sqrt{2}$ и $\rho_5(\pm 1/\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}$ имеем соответственно равенства $6a_3+4a_5=-5$ и $6a_3+4a_5=0$. Противоречие.

Тем не менее, при определенном ограничении на суммарную кратность M узлов задача (31) всегда (т.е. независимо от значений ξ_j и $b_{j,s}$) разрешима.

Теорема 6.1 [80]. *Задача* (31) *заведомо разрешима, если* $M \leqslant n-k+1$. *В частности, задача простой интерполяции всегда разрешима, если число* k *узлов удовлетворяет условию* $2k \leqslant n+1$. *Эта оценка неулучшаема.*

Отметим, что при $k>1$ заведомо разрешимые задачи неполны. При $k=1$, $M=n$ из теоремы 6.1 получается разрешимость задачи интерполяции с одним n-кратным узлом (*Паде-интерполяции*). Разрешимость такой задачи ранее была установлена иными методами (см. §6.7).

В [74, 81] рассматривался вопрос о минимальном $M>n$, гарантирующем единственность решений переопределенных задач (31). Показано, что такое минимальное M равно $2n-1$. В следующих параграфах даны другие признаки разрешимости и единственности решения задачи интерполяции.

6.2. **Редукция к полиномиальной интерполяции.** В [80] для исследования задачи интерполяции посредством НД предложен метод редукции к полиномиальной интерполяции. В основе редукции лежит следующая элементарная лемма пересчета производных (см. [80]; аналогичные формулы применялись также, например, в [96]).

Лемма 6.1. *Производные аналитической функции* $u(z)$ *удовлетворяют равенствам*

$$u^{(s+1)} = uF_s(w), \qquad w = w(z) = u'(z)/u(z), \quad s = 0,1,2,\ldots,$$

где $\{F_s\}$ — *последовательность дифференциальных операторов, определяемых рекуррентно:*

$$F_0(w) = w, \qquad F_{s+1}(w) = wF_s(w) + (F_s(w))'_z, \quad s = 0,1,2,\ldots. \tag{33}$$

Несложно проверить, что $F_s(w) = w^{(s)} + H_s(w, w', \ldots, w^{(s-1)})$, где H_s — определенный алгебраический полином степени не выше $s+1$ по каждому аргументу, $H_0 = 0$. Таким образом, во всех точках аналитичности дроби $\rho_n = Q_n'/Q_n$, имеем

$$Q_n^{(s+1)}(z) = Q_n(z)\cdot(\rho_n^{(s)}(z) + H_s(\rho_n(z), \ldots, \rho_n^{(s-1)}(z))), \qquad s \geqslant 0. \tag{34}$$

Существует аналогичная по виду формула обращения, выражающая производные ρ_n через производные Q_n во всех точках, где НД $\rho_n(z)$ аналитична.

Задачу (31) можем переписать в виде задачи для многочленов $Q_n \not\equiv 0$:

$$\begin{aligned} &Q_n^{(s+1)}(\xi_j) = Q_n(\xi_j)\cdot h_{j,s}, \qquad && h_{j,s} := b_{j,s} + H_s(b_{j,0}, \ldots, b_{j,s-1}), \\ & && j = \overline{1,k}, \quad s = \overline{0, m_j - 1}, \\ & && m_1 + \ldots + m_k = M. \end{aligned} \tag{35}$$

На этой формуле основан критерий разрешимости полной задачи (31), см. ниже теорему 6.2 и ее следствие.

6.3. **Дифференциальное уравнение наипростейших дробей.** Поскольку $Q_n^{(n+1)} \equiv 0$, то из (34) при $s=n$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n, которому удовлетворяет любая НД ρ_n порядка $\leqslant n$ во всех точках, отличных от ее полюсов [80]:

$$y^{(n)}(z) + H_n(y(z), \ldots, y^{(n-1)}(z)) = 0. \tag{36}$$

Можно показать, что дроби ρ_n исчерпывают всю совокупность решений уравнения (36). Действительно, для (36) выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Предположим, что h — какое-либо решение уравнения (36) и в точке $z = a$ это решение аналитично. Построим НД ρ_n порядка не выше n, которая удовлетворяет условиям $\rho_n^{(s)}(a) = h^{(s)}(a)$, $s = \overline{0, n-1}$. Такая дробь существует и единственна (как НД Паде) и тоже является решением уравнения (36), как это уже доказано. Но тогда $h \equiv \rho_n$ ввиду единственности решения задачи Коши.

Например, общим решением уравнения $y' + y^2 = 0$ является множество НД порядка $\leqslant 1$, а уравнения $y'' + 3yy' + y^3 = 0$ — множество НД порядка $\leqslant 2$.

6.4. **Задача обобщенной интерполяции.** Начнем с интерполяции в случае простых узлов. Решение $\rho_n = Q_n'/Q_n$ полной задачи (32) необходимо удовлетворяет системе уравнений

$$Q_n'(\xi_j) = b_j Q_n(\xi_j), \qquad j = \overline{1, n}; \qquad Q_n \not\equiv 0, \tag{37}$$

которую называют *задачей*[4] *обобщенной интерполяции с простыми узлами.* Легко видеть, что решение Q_n задачи (37) всегда существует. Таких решений может быть бесконечно много; будем называть их и соответствующие НД $\rho_n = Q_n'/Q_n$ решениями задачи обобщенной интерполяции (37). Отметим, что решение $\rho_n = Q_n'/Q_n$ задачи (37) может не быть решением задачи (32). Дело в том, что порождающий многочлен Q_n может обращаться в нуль в некоторых узлах ξ_j одновременно с производной Q_n'. Такие узлы называются *особыми относительно решения* ρ_n, остальные узлы называются *регулярными.* В особых узлах ρ_n имеет полюсы, а равенства (37) выполняются независимо от значений b_j. При этом узел, особый относительно одного решения задачи (37), может быть регулярным относительно другого решения. Итак, задача (32) разрешима, если и только если все ее узлы регулярны относительно одного из решений задачи (37).

Обобщенная интерполяция (37) с простыми узлами систематически изучалась в [59], но при дополнительном условии $\deg Q_n = n$. Такое ограничение может приводить к неразрешимым задачам (37). Были получены некоторые критерии их разрешимости с таким ограничением в алгебраических и геометрических терминах.

Пример 6.1. Дроби $\rho_2(z; \alpha)$, определенные в примере 6.1 из §6.1, являются решениями задачи обобщенной интерполяции таблицы $\{(-1; -1), (1; 1)\}$ при всех $\alpha \in \mathbb{C}$, а вот решениями задачи интерполяции той же таблицы в обычном смысле они являются только при $\alpha \neq \pm 2$, поскольку $\rho_2(z; 2)$ и $\rho_2(z; -2)$ имеют полюсы в узлах интерполяции $\xi_1 = -1$ и $\xi_2 = 1$ соответственно.

Еще один пример. Задача обычной интерполяции таблицы примера 6.2 из §6.1 решений не имеет, однако она имеет бесконечно много решений в обобщенном смысле (37):

$$\rho_5 = Q'/Q, \qquad Q(z) = a_2 z^2 + 2a_3 z^3 - a_2 z^4 - 3a_3 z^5, \quad |a_2| + |a_3| \neq 0.$$

[4]Эта задача по форме аналогична классической интерполяции Паде в случае рациональных функций общего вида. Термин *обобщенная интерполяция* был введен в [85].

6.5. **Обобщенная кратная интерполяции посредством НД.** Как и выше, определим обобщенную кратную интерполяцию таблицы $b_{j,s}$, заменив равенства (31) на (35). Узел ξ_j будем называть *особым* (соответственно *регулярным*) *относительно решения* $\rho_n = Q_n'/Q_n$ *задачи обобщенной интерполяции* (35), если $Q_n(\xi_j) = 0$ (соответственно $Q_n(\xi_j) \neq 0$). Отметим, что в особых узлах ξ_j многочлен Q_n имеет нули кратности не ниже $m_j + 1$, а ρ_n имеет полюсы.

Теорема 6.2 [80]. *Полная задача* (35) (*т.е. при* $M = n$) *всегда разрешима.*

Как и в случае интерполяции с простыми узлами, решение задачи (35) не всегда дает решение задачи (31). Сформулируем критерий критерий разрешимости полной задачи (31) в терминах регулярности узлов.

Следствие [80]. *Полная задача* (31) *разрешима, если и только если среди решений обобщенной задачи интерполяции* (35) *найдется решение* ρ_n, *для которого все узлы регулярны.*

Кроме этого критерия в работе [80] с помощью указанной выше редукции получен алгебраический критерий единственности решения задачи (31), а также критерий однозначной разрешимости задачи обобщенной интерполяции (35). Здесь мы ограничимся формулировкой другого рода теоремы для *вещественных* таблиц.

Теорема 6.3 [81]. *Пусть* ρ_n *— вещественнозначная НД порядка, равного* n, *и ее полюсы лежат вне круга* $|z| \leqslant 1$. *Если* ρ_n *является решением полной задачи* (31) *с узлами* $\xi_j \in [-1, 1]$ *и вещественными значениями* $b_{j,s}$, *то* ρ_n *— единственная вещественная интерполяционная дробь.*

6.6. **Интерполяция вещественных констант.** Решение $\rho_n = Q_n'/Q_n$ задачи обобщенной интерполяции констант при любом наборе n узлов $\{\xi_k\}$ всегда существует, единственно и имеет порядок, равный n [58, 84]. Таким образом, в смысле обобщенной интерполяции имеем

$$\rho_n(z) - c = -c\frac{\Pi_n(z)}{Q_n(z)}, \qquad \Pi_n(z) := \prod_{k=1}^{n}(z - \xi_k), \qquad \rho_n(z) = \rho_n(c, \{\xi_k\}; z). \tag{38}$$

Можно выписать и явный вид порождающего многочлена:

$$Q_n(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} c^{-k}\Pi_n^{(k)}(z), \tag{39}$$

что значительно упрощает оценки корней этого многочлена и погрешности интерполяции. Наиболее полно изучена задача об интерполяции вещественных констант на отрезках вещественной оси; см. [58,79,82,84]. Не нарушая общности, ограничимся изложением результатов в случае интерполяции положительных констант по узлам, лежащим на отрезке $[-1, 1]$.

Первый результат был получен в [84] для случая интерполяции констант $c \in (0, 15/31)$ по чебышевскому набору узлов $t_k = \cos((2k-1)\pi/(2n))$, $k = \overline{1, n}$. Там доказано, что $\rho_n(c, \{t_k\}; z)$ не имеет полюсов в круге $|z| \leqslant 1$ и получена оценка

$$\|\rho_n(c, \{t_k\}; \cdot) - c\|_{C([-1,1])} \leqslant \frac{c}{2^{2n-1}n!} \cdot \frac{1-c}{1-2c}, \qquad n \geqslant 2.$$

К настоящему времени наиболее сильный результат получен в [79, 82]. Именно, доказано, что при $c > 0$ и $n > 8c$, и любом наборе узлов $\xi_k \in [-1, 1]$ имеем

точную по порядку двустороннюю оценку

$$\frac{c^{n+1}}{2^{n-1}n!e^{2c}} \leqslant \|\rho_n(c,\{\xi_k\};\cdot)-c\|_{C([-1,1])} \leqslant \frac{2^n c^{n+1}e^{2c}}{n!v_n(c)},$$

с определенным $v_n(c)>0$, $\lim_{n\to\infty} v_n(c)=1$. При этом порядок по n верхней оценки достигается, например, при интерполяции с n-кратным узлом $\xi_1=1$, а порядок нижней — при интерполяции по чебышевскому набору узлов $\{t_k\}$.

Отметим еще, что явные интерполяционные формулы были получены в [76] методом разностных уравнений для рациональных функций вида

$$az+b, \qquad \frac{a_1z+b_1}{(a_2z+b_2)z}, \qquad |a_1|+|b_1|\neq 0, \qquad |a_2|+|b_2|\neq 0$$

(часть этих результатов была независимо получена Е. Н. Кондаковой [86]). Оценки погрешности интерполяции получены к настоящему моменту только в исключительных случаях, к которым, помимо интерполяции констант, относится Паде-интерполяция.

6.7. **Паде-интерполяция.** Пусть фиксирована аналитическая в некоторой окрестности начала функция

$$f(z)=f_0+f_1z+f_2z^2+\dots. \tag{40}$$

Скажем, что НД ρ_ν вида (1) порядка $\nu\leqslant n$ является *НД Паде* n*-кратной интерполяции* (с узлом $z=0$) функции f, если

$$f(z)-\rho_\nu(z)=O(z^n) \qquad \text{при} \qquad z\to 0. \tag{41}$$

Задача Паде для НД всегда имеет решение и притом единственное [54]. В [54] предложен следующий метод построения НД Паде. При натуральных m обозначим через

$$S_m=S_m(z_1^{-1},\dots,z_n^{-1}):=\sum\nolimits_{k=1}^{n} z_k^{-m}=-\tfrac{1}{(m-1)!}\rho_n^{(m-1)}(0) \tag{42}$$

степенные суммы чисел z_k^{-1}. Условие (41), как легко видеть из (42), равносильно разрешимости относительно $\lambda_k=z_k^{-1}$ системы $S_m=-f_{m-1}$, $m=\overline{1,n}$, а последняя, как хорошо известно [91, Гл. 11, §52-53], всегда имеет (единственное) решение совпадающее с корнями многочлена

$$\mathcal{T}_n(\lambda)=\lambda^n-\tau_1\lambda^{n-1}+\tau_2\lambda^{n-2}+\dots+(-1)^n\tau_n, \tag{43}$$

коэффициенты которого находятся по *рекуррентным формулам Ньютона*

$$\tau_1=-f_0, \quad \tau_m=(-1)^m m^{-1}\left(f_{m-1}+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j f_{m-j-1}\tau_j\right), \quad m=\overline{2,n}.$$

Поэтому все конечные (и ненулевые) полюсы z_k искомой НД Паде суть величины, обратные ненулевым корням λ_k (обозначим их число через ν) многочлена (43). Если $\lambda_k=0$, то полагаем $z_k=\infty$, и соответствующее слагаемое в ρ_ν исчезает. В результате получается искомая НД Паде порядка ν.

В [54] был предложен другой подход к построению НД Паде, который затем значительно уточнил О. Н. Косухин [88]. Суть подхода состоит в следующем. Для функции (40) рассмотрим интеграл $\alpha(z):=\int_0^z f(\zeta)d\zeta$, где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути в некоторой окрестности начала. Оказывается, НД Паде для функции f совпадает с логарифмической производной

частичной суммы $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ ряда Маклорена функции $\exp(\alpha(z))$. Благодаря такой конструкции в [88] был получен ряд интересных результатов об области сходимости последовательности интерполяционных НД Паде $\{\rho_n\}$ к f (эта область, вообще говоря, шире чем круг сходимости ряда Тейлора для функции f). Кроме того, в [88] получены оценки остаточного члена интерполяции НД Паде для аналитических функций класса Харди H_1.

В работах [60] разработан еще один метод построения НД Паде — в виде интеграла Эрмита

$$\rho_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, \frac{R_n(\zeta) - R_n(z)}{(\zeta - z)\, R_n(\zeta)}\, d\zeta, \qquad z \in G(\gamma), \tag{44}$$

где γ — спрямляемый жорданов контур, содержащий внутри себя точку $z = 0$, функция f аналитична на замыкании области $G(\gamma)$, ограниченной контуром γ,

$$R_n(z) = \frac{z^n}{Q(z)}, \quad Q(z) = \prod_{k=1}^{\nu} (z - z_k) = z^\nu + q_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + q_0,$$

а значения ν, z_k определены выше вокруг формулы (43). Из (44) имеем явный вид остаточного члена

$$f(z) - \rho_\nu(z) = \frac{1}{Q(z)} \sum_{k=n}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\nu} q_m f_{k-m}, \quad |z| \leqslant \min_{\zeta\in\gamma} |\zeta|. \tag{45}$$

Приведем одну оценку остаточного члена в случае, когда коэффициенты функции (40) по модулю ограничены членами некоторой геометрической прогрессии.

Теорема 6.4 [60]. *Если $|f_{m-1}| \leqslant a^m$ для всех m при некотором $a > 0$, то*

$$|f(z) - \rho_\nu(z)| \leqslant \frac{a}{1 - a|z|} \frac{|z|^n}{r^n} \left(\frac{1 - \varepsilon_n + ar}{1 - \varepsilon_n - ar} \right)^n \ln \frac{er}{r - |z|}, \quad |z| < r < \frac{1 - \varepsilon_n}{a}, \tag{46}$$

где ε_n удовлетворяют соотношениям $\varepsilon_n^2 - (1 - \varepsilon_n)^{n+1} = 0$, $\varepsilon_n \sim 2n^{-1} \ln n$.

Отметим, что (46) опирается на следующую точную по порядку величины a оценку, представляющую и самостоятельный интерес.

Лемма 6.1 [104]. *Если для чисел λ_k их степенные суммы вида* (42) *удовлетворяют неравенствам $|S_m| \leqslant a^m$, $m = \overline{1,n}$, то $|\lambda_k| < (1 - \varepsilon_n)^{-1} a$, $k = \overline{1,n}$.*

7. Равномерная аппроксимация посредством НД на компактах

7.1. **Аналог теоремы Мергеляна.** Пусть $K \subset \mathbb{C}$ компакт со связным дополнением. Для НД со свободными полюсами справедлива следующая

Теорема 7.1 [53, 54]. *Любую функцию, удовлетворяющую условиям теоремы Мергеляна* [100, Д.1] *на K (т.е. непрерывную на компакте K и аналитическую в его внутренних точках, кратко, $f \in CA(K)$) можно с любой точностью равномерно приблизить на K посредством НД.*

7.2. **Связь аппроксимативных свойств НД и многочленов.** Пусть K – спрямляемый компакт (см. §1.3 введения). Обозначим через $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n(f, K)$ и $E_n = E_n(f, K)$ наименьшие равномерные уклонения на K функции f от множества НД порядка не выше n и многочленов степени не выше n соответственно.

Пусть $f \in CA(K)$. В [53, 54] показано, что

$$\mathcal{R}_{[n \ln(1/E_n)]} < C\, E_n, \qquad C = C(f, K), \quad n \geqslant n_0(f, K).$$

При фиксированном $b \in K$ положим $\alpha(f; b, z) = \int_b^z f(t)\,dt$, где интеграл берется по лежащей на K спрямляемой кривой, соединяющей точки b и $z \in K$. О. Н. Косухин в [88] установил на спрямляемых компактах слабую эквивалентность:

$$\mathcal{R}_{n+1}(f, K) \asymp E_n(fe^{\alpha(f;b,\cdot)}, K). \tag{47}$$

Этот результат и ряд разработанных Косухиным методов позволили ему получить для НД аналоги классических полиномиальных теорем Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В. К. Дзядыка, Дж. Л. Уолша [88]. Например, для НД получен следующий аналог классической теоремы Джексона-Корнейчука об оценке уклонений $E_n(f, K)$ через модуль непрерывности $\omega(f, K; \delta)$.

Теорема 7.2 [88]. *Если $K = D$ — замкнутый круг или отрезок прямой диаметра $2d$, то для $f \in CA(D)$ имеем*

$$\mathcal{R}_n(f, D) \leqslant A(d\|f\|_{C(D)}) \left(\omega\left(f, D; \frac{\pi d}{n}\right) + \left(\frac{\pi d}{n}\right) \|f\|^2_{C(D)}\right).$$

Здесь, в отличие от полиномиального случая, нельзя отбросить второе слагаемое в мажоранте, так как уже для $f \equiv \mathrm{const} \neq 0$ имеем $\omega(f, D; \pi d/n) = 0$ и в то же время $\mathcal{R}_n(f, D) \neq 0$.

Этот результат в [88] обобщен на функции с $f^{(s)} \in CA(D)$, $s = 1, 2, \ldots$. Приведем еще один результат О. Н. Косухина (аналог теоремы Бернштейна), показывающий, насколько в некоторых задачах сходны аппроксимативные свойства НД и многочленов.

Теорема 7.3 [88]. *Пусть D — замкнутый круг, $\beta \in (0, 1)$. Функция $f^{(s)} \in CA(D) \cap \mathrm{Lip}^\beta(D)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_n(f, D) \leqslant C/n^{k+\beta}$.*

Добавим к этому, что Я. В. Новак [97] в случае $K = [-1, 1]$ получил критерий наилучшего приближения посредством НД, вполне аналогичный критерию А. Н. Колмогорова [27, Гл. 1, §47] наилучшего приближения многочленами (см. §8.4). (Для компакта K общего вида им доказана достаточность условия Колмогорова, см. (53) в §8.4, где второй множитель надо заменить на комплексно сопряженный.) Кроме того, Я. В. Новак получил следующий локальный аналог теоремы Бернштейна.

Теорема 7.4 [96]. *Непрерывная на $[-1, 1]$ функция f принадлежит классу $C^n([-1, 1])$, если и только если существует функция $F \in C([-1, 1])$ такая, что*

$$\mathcal{R}_n(f, [x_1, x_2])(x_2 - x_1)^{-n} \to F(x), \qquad -1 \leqslant x_1 < x < x_2 \leqslant 1, \tag{48}$$

равномерно по x при $x_1, x_2 \to x$. Если последнее условие выполняется, то имеет место тождество

$$n!2^{2n-1}F(x) \equiv \left|\frac{d^n}{dt^n}\left(f(t)e^{\alpha(f;x,t)}\right)_{t=x}\right|.$$

Примечание. Из теоремы 7.4 можно усмотреть порядок скорости наилучшего приближения малых констант на отрезке $[-1, 1]$. Действительно, пусть $f(x) = c > 0$. Тогда $F(x) \equiv c^{n+1}2^{1-2n}/n!$. При $x_1 = -\varepsilon$, $x_2 = \varepsilon$ и $\varepsilon \to 0$ из (48) для НД $\tilde{\rho}_n(\varepsilon; x) = \varepsilon\rho_n(\varepsilon; x\varepsilon)$, где $\rho_n(\varepsilon; \cdot)$ — НД наилучшего приближения

константы c на $[-\varepsilon, \varepsilon]$, имеем (ср. с (52)),

$$\max_{x\in[-1,1]} |\tilde{\rho}_n(\varepsilon; x) - \tilde{c}| = \frac{\tilde{c}^{n+1}}{2^{n-1}n!} + o(\varepsilon^{n+1}), \qquad \tilde{c} = \varepsilon c.$$

8. Равномерная аппроксимация на отрезке действительной оси

В этом параграфе рассматривается задача наилучшего равномерного приближения непрерывных вещественных функций f на отрезке $K \subset \mathbb{R}$ *вещественнозначными* НД (все полюсы которых либо вещественные, либо попарно сопряженные). Не нарушая общности, можем считать $K = [-1, 1]$. Для этого случая обозначим через $\mathcal{R}_n(f)$ наименьшее уклонение функции f от множества вещественнозначных НД порядка $\leqslant n$, а через $\rho_n^*(f; x)$ — вещественнозначную НД наилучшего приближения (несложно показать, что эта НД существует [58]).

8.1. **Неединственность и другие особенности НД наилучшего приближения.** Как уже говорилось, ряд аппроксимативных свойств НД принципиально отличаются от свойств многочленов. Покажем на примерах, что существуют непрерывные функции f, для которых

(a) НД $\rho_n^*(f; x)$ неединственна;

(b) разность $\rho_n^*(f; x) - f(x)$ не характеризуется чебышевским альтернансом, состоящим из $n + 1$ точек отрезка [5] $[-1, 1]$.

Пример 8.1 [58]. Каждая НД порядка 2 вида

$$\frac{2x + \lambda}{x^2 + \lambda x + 1}, \qquad \lambda \in [1, \lambda^*], \quad \lambda^* = 1.62\ldots, \tag{49}$$

наименее уклоняется от функции $f(x) = x + 1$ на отрезке $[-1, 1]$ среди всех НД порядка не выше 2. Величина наименьшего уклонения равна 1. Только в случае $\lambda = \lambda^*$ имеется альтернанс из трех точек отрезка $[-1, 1]$; для остальных значений λ нет даже двухточечного альтернанса.

К этому примеру можно добавить следующее. Для функции $x + 1/2$ НД наилучшего приближения уже единственна, она совпадает с НД (49), где $\lambda = 1$, причем существует альтернанс из трех точек: $\{-1, 0, 1\}$. Таким образом, при приближении посредством НД функции, отличающиеся друг от друга лишь на константу, могут иметь совершенно разные аппроксимативные свойства.

Позже пример неединственности, равно как и необязательности альтернанса для наилучшего приближения, был построен и для произвольного порядка $n \geqslant 2$. Конструкция весьма сложна и мы остановимся лишь на ее идее.

Пример 8.2 [75, 78]. Рассмотрим таблицу интерполяции $T = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ с вещественными узлами:

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n, \qquad y_k = \frac{n}{x_k} \quad (k = \overline{2, n}), \quad y_1 = -\frac{y_2 + \ldots + y_n}{n - 1}. \tag{50}$$

Несложно проверить, что задача интерполяции таблицы T имеет бесконечно много решений вида

$$\rho_{n,s}(x) = (Q_{n,s}(x))'_x / Q_{n,s}(x),$$
$$Q_{n,s}(x) = x^n + s \cdot \left(x^{n-1} + \textstyle\sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \cdot \frac{\sigma_{j-1}}{j} x^{n-j}\right), \quad s > 0,$$

[5] т.е. из точек $a_1 < \ldots < a_{n+1}$, для которых $\rho_n^*(f; a_k) - f(a_k) = \pm(-1)^k \mathcal{R}_n(f)$.

где $\sigma_m = \sigma_m(x_2, \ldots, x_n)$ — элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_0 := 1, \qquad \sigma_k(z_1, \ldots, z_q) := \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant q} z_{j_1} z_{j_2} \ldots z_{j_k}, \qquad k = \overline{1, q}.$$

При этом существует отрезок $I := [s_1, s_2]$ значений параметра s такой, что $\rho_{n,s}$ не имеет полюсов на $[x_1, x_n]$. Отсюда, в частности следует, что $\rho_{n,s}$, $s \in I$, образуют компактное семейство на $[x_1, x_n]$. Вследствие этого, выбрав $\varepsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию f так, что

$$f(x_1) = y_1 + \varepsilon, \quad f(x_k) = y_k + (-1)^k \varepsilon, \qquad k = \overline{2, n}, \qquad |f(x) - \rho_{n,s}(x)| < \varepsilon \tag{51}$$

при $x \neq x_k$, $s \in I_1 \subset I$. Построение завершается доказательством существования числа ε^* и таблицы (x_k^*, y_k^*) со свойством (50) таких, что любая НД, для которой неравенство в (51) выполнено при $\varepsilon = \varepsilon^*$ всюду, включая узлы $x = x_k^*$, имеет полюс на отрезке $[0, x_n]$.

Отметим, что величина наилучшего приближения в примере 8.2 равна ε^* и достигается во всех x_k^*. При этом разность $f(x) - \rho_{n,s}(x)$ имеет на отрезке $[0, x_n^*]$ альтернанс ровно из $n - 1$ точек.

В [78] показано, что функцию f при построении примера можно выбрать так, что при одном значении параметра $s \in I_1$ разность будет альтернировать в $n + 1$ точках отрезка (а при других значениях параметра, по-прежнему, — в $n - 1$ точках).

8.2. **Наилучшее приближение констант и альтернанс.** Из предыдущего параграфа видно, что для НД не существует точного аналога классической теоремы П. Л. Чебышева об альтернансе. Однако для функций некоторых классов такие аналоги все же имеют место. Первые результаты в этом направлении получены для *вещественных постоянных функций* $f(x) = c$ (см. [58,74,77,79,82]). Отметим, что задачу о наилучшем приближении констант можно считать одним из аналогов задачи П. Л. Чебышева об унитарном многочлене, наименее уклоняющемся от константы.

В работе [58] при достаточно больших $n > n_0(c)$ доказана *необходимость* существования $(n + 1)$-точечного альтернанса для наилучшего приближения констант $c \in (0, \ln \sqrt{2})$ посредством НД порядка n. Там же доказана *единственность* вещественнозначной НД $\rho_n^*(c; x)$ наилучшего приближения. В работе [79] доказана *достаточность* указанного альтернанса, но при весьма жестком ограничении: $|c| \leqslant c_n$, где последовательность $\{c_n\}$ достаточно быстро убывает к нулю. Эти предварительные результаты объединяет и усиливает следующая

Теорема 8.1 [82]. *Для любой вещественной константы $c \neq 0$ дробь $\rho_n^*(c; \cdot)$ при каждом $n > 8|c|$ единственна и имеет порядок n.*

Существование чебышевского альтернанса из $n+1$ точек на отрезке $[-1, 1]$ для разности $\rho_n - c$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(c; x)$. Для наименьших уклонений $\mathcal{R}_n(c)$ имеем двустороннюю оценку:

$$\frac{|c|^{n+1}}{2^{n-1} n!} \cdot \frac{e^{-|c|}}{\operatorname{ch} c \cdot W_n(|c|)} \leqslant \mathcal{R}_n(c) \leqslant \frac{|c|^{n+1}}{2^{n-1} n!} \cdot \frac{e^{2|c|}}{V_n(|c|)} \tag{52}$$

с определенными положительными $V_n(|c|)$, $W_n(|c|)$, стремящимися к единице при $n \to \infty$.

Заметим, что из результатов О. Н. Косухина (см. (47) и теорему 1.2 из [87]) с помощью известной оценки величины $E_{n-1}(F, [-1, 1])$ для функций F со знакопостоянной на $[-1, 1]$ производной $F^{(n)}$ получается двусторонняя оценка наименьших уклонений НД от константы:

$$\frac{|c|^{n+1}}{2^{n-1}n!} \cdot \frac{e^{-2|c|}}{1 + 2|c|e^{|c|}} \leqslant \mathcal{R}_n(c) \leqslant \frac{|c|^{n+1}}{2^{n-1}n!} \cdot 2(1 + |c|)e^{2|c|}.$$

В этой оценке нет ограничений на соотношение между c и n, но постоянные множители при $|c|^{n+1}2^{1-n}/n!$ менее точны, чем в (52).

Опустить или существенно ослабить ограничение на n в утверждении теоремы нельзя в следующем смысле. Из [18] следует, что для любой НД ρ_n найдется точка $x_0 \in [-1, 1]$, в которой $|\rho_n(x_0)| < \mathcal{K}n$, где $\mathcal{K}$ — константа. Значит, константы $c > \mathcal{K}n$ заведомо не могут хорошо приближаться на $[-1, 1]$ такими дробями ρ_n, ибо погрешность аппроксимации имеет в лучшем случае порядок самой константы.

Правдоподобна гипотеза о том, что, как и в случае констант, аналог теоремы Чебышева верен для любой непрерывной вещественнозначной функции f, *если порядок $n \geqslant n_0(f)$ достаточно велик* [55]. Например, в [75] построен пример появления единственности и альтернанса с ростом n, а именно, показано, что дробь $\rho_3^*(x^3 + 1; \cdot)$ единственна и характеризуется альтернансом из 4-х точек, тогда как при $n = 2$ наилучшее приближение функции $x^3 + 1$ неединственно и альтернанс необязателен.

8.3. **Алгоритм построения НД наилучшего приближения констант.** В теории полиномиальных аппроксимаций хорошо известен алгоритм Ремеза, с помощью которого можно построить многочлен наилучшего приближения и соответствующий альтернанс из $n+2$ точек. Для $\rho_n - c$ имеется алгоритм построения альтернанса из $n+1$ точек отрезка $[-1, 1]$ в случае констант $c \in (0, \ln\sqrt{2})$, $n > n_0(c)$ (см. [58]). В [82] показано, что этот алгоритм переносится дословно на случай любой константы $|c| < n/8$. Таким образом, с учетом предыдущей теоремы, алгоритм приводит к построению НД $\rho_n^*(c; \cdot)$ наилучшего приближения. Приведем этот алгоритм [58].

Сначала берутся произвольно узлы $-1 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < 1$ и для $f(x) = c$ строится интерполяционная НД $\rho_n(x)$ (один из способов построения см. в (38) и (39)). Вычисляются sup-нормы N_k разности $\rho_n(x) - c$ на отрезках $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \ldots, n + 1$, где $\xi_0 = -1$, $\xi_{n+1} = 1$. Если все N_k равны, то искомая НД построена. В противном случае выбирается какой-либо номер m, для которого значение N_m минимально. Если $2 \leqslant m \leqslant n$, то соответствующие узлы ξ_{m-1} и ξ_m слегка «раздвигаются», т.е. заменяются на $\xi_{m-1} - \varepsilon$, $\xi_m + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Если $m = 1$, то узел ξ_1 «сдвигается» вправо, если $m = n+1$, то узел ξ_n «сдвигается» влево. И все повторяется с новым набором узлов. Показано, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем убывание норм разностей интерполяционных НД и c на $[-1, 1]$. Параметр ε в этом процессе, естественно, уменьшается.

За начальный набор узлов интерполяции рекомендуется брать набор узлов Чебышева, т.к. норма разности соответствующей интерполяционной НД и c близка по порядку к наименьшему уклонению [82].

8.4. **Критерии наилучшего приближения вещественнозначных функций на отрезке.** Я. В. Новак доказал следующий критерий наилучшего приближения вещественнозначными НД вещественных непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций f, вполне аналогичный критерию Колмогорова для полиномов.

Теорема 8.2 [97]. *Имеем $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(f;x)$, если и только если для произвольной НД $\widetilde{\rho}_n$, не имеющей полюсов на $[-1,1]$, выполняется неравенство*

$$\min_{x \in E} (\rho_n(x) - \widetilde{\rho}_n(x))(\rho_n(x) - f(x)) \leqslant 0, \tag{53}$$

где $E = \{x \in [-1,1] : |f(x) - \rho_n(x)| = \|f - \rho_n\|_{C([-1,1])}\}$.

Следующий критерий наилучшего приближения в терминах альтернанса в настоящее время является наиболее общим результатом в этом направлении. Некоторые его частные случаи формулировались в [74, 77, 83, 97].

Теорема 8.3 [12, 81]. *Пусть вещественнозначная НД ρ_n имеет порядок, равный n, и ее полюсы расположены вне круга $|z| \leqslant 1$. Тогда $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(f;x)$ в том и только том случае, когда для разности $f - \rho_n$ на $[-1,1]$ имеется альтернанс из $n+1$ точек. При этом $\rho_n^*(f;x)$ является единственной НД наилучшего приближения. Условие на расположение полюсов ослабить нельзя.*

Заметим, что в теореме 8.3 невозможность ослабления условия на полюсы означает, что если хотя бы одна пара комплексных сопряженных полюсов ρ_n попадает в круг $|z| \leqslant 1$, то, вообще говоря, при выполнении других условий теоремы ρ_n может не быть НД наилучшего приближения, или НД наилучшего приближения неединственна.

Так, в примере 8.1 возникает неединственность, хотя при $\lambda = \lambda^*$ на отрезке $[-1,1]$ имеется альтернанс из трех точек. Здесь условие теоремы 8.3 не выполнено, поскольку полюсы НД (49) лежат на единичной окружности.

В построенном ниже примере 8.3 доказана недостаточность даже $2n-1$ точек альтернанса для наилучшего приближения. Там также условие теоремы 8.3 не выполнено: все полюсы НД лежат *внутри* единичного круга. Другие примеры, связанные с невозможностью ослабления условия на полюсы, см. в [81].

Обратим внимание на то, что в теореме порядок ρ_n равен в точности n. Это ограничение в [81] снято применительно к *достаточности* альтернанса, т.е. показано, что при наличии указанного альтернанса и условия на полюсы имеем $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(f;x)$ и в случае, когда порядок ρ_n не выше n. По-видимому, условие избыточно и в отношении необходимости альтернанса и единственности наилучшего приближения.

Ранее Я. В. Новак [97] доказал аналог теоремы 8.3 для случая n *вещественных различных* полюсов за исключением утверждения о единственности. Для случая n *различных* полюсов дроби ρ_n достаточность альтернанса была доказана в [77], а необходимость альтернанса и единственность наилучшего приближения – в [83].

Теорему 8.3 можно переформулировать. Пусть X — произвольный компакт на $\mathbb{C}$, расположенный симметрично относительно $\mathbb{R}$ и не имеющий общих точек с кругом $|z| \leqslant 1$. Через $\rho_n^{**}(X;f;x)$ обозначим НД наилучшего приближения функции f на $[-1,1]$, среди всех вещественнозначных НД порядка n, полюсы которых лежат на X (такая НД, очевидно, существует и имеет порядок, равный n).

Теорема 8.4 . *Имеем $\rho_n^{**}(X;f;x) \equiv \rho_n^*(f;x)$ в том и только том случае, когда для разности $f - \rho_n^{**}(X;f;x)$ на $[-1,1]$ имеется альтернанс из $n+1$ точек.*

Здесь условие на компакт ослабить нельзя в следующем смысле. Если X имеет непустое пересечение с кругом $|z| \leqslant 1$, то альтернанс, вообще говоря, не гарантирует равенство $\rho_n^{**}(X;f;x) \equiv \rho_n^*(f;x)$ [81].

Теорему 8.3 можно дополнить теоремой типа Валле-Пуссена [27, Гл. 2, §32]:

Теорема 8.5 [12,81]. *Если полюсы НД ρ_n порядка $\leqslant n$ лежат вне круга $|z| \leqslant 1$ и найдутся точки $-1 \leqslant t_1 < \ldots < t_{n+1} \leqslant 1$ такие, что*

$$f(t_j) - \rho_n(t_j) = \pm(-1)^j a_j, \qquad a_j > 0, \quad j = \overline{1, n+1},$$

то $\mathcal{R}_n(f) \geqslant \min\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$.

Отметим, что для ρ_n порядка, равного n, эта теорема в других терминах была сформулирована как гипотеза в [97] (см. также [77]).

8.5. **Чебышевские системы функций, связанные с НД. Идея доказательства теоремы об альтернансе.** Напомним, что система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ функций, непрерывных на множестве $K \subset \mathbb{C}$, содержащем не менее $n+1$ точек, удовлетворяет *условию Хаара*, если для всякого обобщенного полинома вида

$$F_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; z) := \alpha_1 f_1(z) + \ldots + \alpha_n f_n(z) \not\equiv 0$$

с коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{C}$, число его различных нулей на K не превосходит $n-1$ (см., например, [27, Гл. 1, §§43-48]). Условие Хаара, очевидно, эквивалентно тому, что $\det(f_j(\xi_l))_{l,j=1}^n \neq 0$ для любых различных n точек $\xi_l \in K$ и, как доказал А. Хаар, равносильно *единственности* полинома $\alpha_1^* f_1 + \ldots + \alpha_n^* f_n$ наилучшего приближения для каждой непрерывной на K функции f. В частности, если функции f_j вещественны и удовлетворяют условию Хаара на отрезке $[-1,1]$, то систему $\{f_1, \ldots, f_n\}$ называют *системой Чебышева* на $[-1,1]$. На системы функций Чебышева дословно переносится теорема П. Л. Чебышева об альтернансе и некоторые другие результаты теории приближений алгебраическими полиномами.

Будем говорить, что система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ аналитических функций удовлетворяет *усиленному условию Хаара* (в замкнутой или открытой) области $K \subset \mathbb{C}$, если для всякого обобщенного полинома $F_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; z) \not\equiv 0$ сумма кратностей его нулей на K не превосходит $n-1$.

Пусть точки $z_1, \ldots, z_k$ лежат вне круга $|z| \leqslant 1$ и расположены симметрично относительно вещественной оси $\mathbb{R}$. Введем систему χ из n функций вида

$$f_{j,s}(x) = (x - z_j)^{-s}, \qquad j = \overline{1,k}, \quad s = \overline{2, m_j + 1}; \quad \sum\nolimits_{j=1}^k m_j = n, \tag{54}$$

где каждому полюсу z_j сопоставлено число $m_j = m(z_j) \in \mathbb{N}$, причем $m(z_j) = m(z_k)$, если $z_j = \overline{z_k}$ и $z_j \notin \mathbb{R}$.

Одним из вспомогательных инструментов доказательства теорем 8.3, 8.5 является следующая теорема, представляющая и самостоятельный интерес.

Теорема 8.6 [81,83]. *Система χ на отрезке $[-1,1]$ удовлетворяет усиленному условию Хаара.*

Ограничимся схемой доказательства ослабленного варианта теоремы: система χ удовлетворяет обычному условию Хаара в случае, когда все $m_j = 1$. Как

говорилось, в этом случае условие Хаара равносильно условию

$$\mathcal{D}(\{\xi_l\};\{z_j\}) := \det((\xi_l - z_j)^{-2})_{l,j=1}^n \neq 0$$

по всем наборам из n различных точек ξ_l отрезка $[-1,1]$. В доказательстве этого неравенства ключевым является тождество Борхарта (см. [93, §1.3]):

$$\mathcal{D}(\{\xi_l\};\{z_j\}) = W \cdot T, \tag{55}$$

где W и T — детерминант и перманент[6] матрицы $((\xi_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n$ соответственно. Определитель W раскладывается по известной (см. [27, Гл. 1, §14]) формуле

$$W = \det((\xi_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n = \frac{\prod_{1\leqslant l<j\leqslant n}(\xi_j - \xi_l)(z_l - z_j)}{\prod_{l,j=1}^n(\xi_l - z_j)}.$$

В рассматриваемом случае, точки ξ_l, равно как и полюсы z_j, попарно различны, поэтому $W \neq 0$. Несколько сложнее доказывается (см. [77,81]), что и перманент $T \neq 0$. В результате приходим к искомому неравенству $\mathcal{D}(\{\xi_l\};\{z_j\}) \neq 0$.

Примечание. Если в (54) все z_j вещественны и лежат за пределами отрезка $[-1,1]$, то по теореме 8.6 система χ на отрезке $[-1,1]$ удовлетворяет *усиленному условию Чебышева.* Это утверждение для системы функций $\{(x-z_j)^{-2}\}_{j=1}^n$ с n попарно различными полюсами $z_j \in \mathbb{R}$ при условии справедливости тождества Борхарта (55) впервые было доказано в [97] (см. также [77,83]).

Применение теоремы 8.6 к доказательству теоремы 8.3 осуществляется посредством следующей леммы и ее следствия.

Лемма 8.1 [74,81]. *Пусть $\rho_n(x) = (\ln Q(x))'$, где Q — полином степени n вида*

$$Q(x) = (x-z_1)^{m_1}\dots(x-z_k)^{m_k} \qquad (m_1+\ldots+m_k = n),$$

$z_1,\dots,z_k$ — попарно различные точки на $\mathbb{C}$, а m_j — натуральные числа. Тогда для любой НД $\tilde\rho_n(x) = (\ln P(x))'$ порядка не выше n существуют n однозначно определенных чисел $\alpha_{j,s}$ таких, что

$$\tilde\rho_n(x) - \rho_n(x) \equiv \frac{Q(x)}{P(x)} \cdot \sum_{j=1}^{k}\sum_{s=2}^{m_j+1}\frac{\alpha_{j,s}}{(x-z_j)^s}.$$

Из леммы и теоремы 8.6 получается

Следствие. *Если все полюсы вещественнозначной НД ρ_n порядка n лежат вне круга $|z| \leqslant 1$, а $\tilde\rho_n \not\equiv \rho_n$ — другая вещественнозначная НД порядка не выше n, то сумма кратностей нулей разности $\tilde\rho_n - \rho_n$ на $[-1,1]$ не превосходит $n-1$. В частности, $\tilde\rho_n - \rho_n$ имеет на $[-1,1]$ не более $n-1$ различных нулей.*

Из следствия сразу получается достаточность альтернанса в теореме 8.3. Действительно, пусть для разности $f - \rho_n$ существует альтернанс из $n+1$ точек $-1 \leqslant t_1 < \ldots < t_{n+1} \leqslant 1$. Допустим существование НД $\tilde\rho_n$, для которой $\max_{[-1,1]}|f-\rho_n| > \max_{[-1,1]}|f-\tilde\rho_n|$. Тогда при $j = \overline{1,n+1}$ имеем

$$\operatorname{sgn}[\tilde\rho_n(t_j) - \rho_n(t_j)] = \operatorname{sgn}[(\tilde\rho_n(t_j) - f(t_j)) - (\rho_n(t_j) - f(t_j))] = \pm(-1)^j,$$

так что функция $\tilde\rho_n - \rho_n$ имеет на интервале $(-1,1)$ не менее n различных нулей. Но тогда по следствию $\tilde\rho_n \equiv \rho_n$. Противоречие с допущением.

[6] Перманент квадратной матрицы — это матричная функция, вычисляемая по правилу разложения определителя, но с тем отличием, что перед каждым произведением элементов независимо от четности соответствующей перестановки ставится плюс.

8.6. **Минимальное число точек альтернанса, гарантирующее наилучшее приближение.** Вопрос о минимальном числе N точек альтернанса, гарантирующем наилучшее приближение посредством НД порядка $\leqslant n$ независимо от свойств приближаемой непрерывной функции рассматривался в [75]. Оказывается, что $N = 2n$. Действительно, достаточность такого числа точек альтернанса очевидна; а недостаточность $2n-1$ точек подтверждается следующим примером (при изложении ограничимся случаем четных n).

Пример 8.3 [75, 81]. Введем следующие положительные на $\mathbb{R}$ многочлены

$$P(x) = \varepsilon + \prod_{k=1}^{m}(x + 2^{-k})^2, \qquad Q(x) = \varepsilon + \prod_{k=1}^{m}(x - 2^{-k})^2, \qquad \varepsilon > 0,$$

степени $n = 2m$. Доказано [75], что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ многочлен $P'Q - Q'P$ имеет ровно $2n-2$ простых нулей $\xi_k \in (-1, 1)$. Отсюда следует, что разность НД $\rho_n = Q'/Q$ и $\widetilde{\rho}_n = P'/P$ в точках ξ_k имеет $2n-2$ перемен знаков. Легко видеть, что любая непрерывная вещественнозначная функция f, график которой проходит через точки $(\xi_k, \rho_n(\xi_k))$ и которая удовлетворяет условию

$$\operatorname{sgn}\,(f(x) - \rho_n(x)) = \operatorname{sgn}\,(f(x) - \widetilde{\rho}_n(x)) = \operatorname{sgn}\,(\widetilde{\rho}_n(x) - \rho_n(x))$$

($2n-2$ перемен знаков), приближается (на любом отрезке) дробью $\widetilde{\rho}_n$ лучше, чем дробью ρ_n. Для того, чтобы разность $f(x)-\rho_n(x)$ имела $2n-1$ точек альтернанса остается дополнительно потребовать от f, чтобы на всех $2n-1$ промежутках отрезка $[-1, 1]$, где знаки разности $f(x) - \rho_n(x)$ постоянны, sup-нормы этой разности были одинаковыми.

9. Аппроксимация посредством НД в $L_p(\mathbb{R})$. Ряды НД

9.1. **Класс аппроксимируемых функций.** Пусть $p \in (1, \infty)$. Через S_p обозначим класс всех комплекснозначных функций $f \in L_p = L_p(\mathbb{R})$, приближаемых сколь угодно точно посредством НД в метрике L_p. Полное описание класса S_p получено В. Ю. Протасовым в работе [98]. Им, в частности, показано, что любая функция $f \in S_p$ является аналитической на $\mathbb{R}$, продолжается до мероморфной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функции и представляется в виде ряда $f(x) = \rho_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x - z_k)^{-1}$, сходящегося в L_p. При этом показатель сходимости последовательности $\{z_k\}$ удовлетворяет неравенству

$$\tau(\{z_k\}) \leqslant 1 - 1/p, \qquad \tau(\{z_k\}) := \inf\left\{\gamma > 0,\ \sum\nolimits_k |z_k|^{-\gamma} < \infty\right\}. \tag{56}$$

Таким образом, класс S_p состоит из тех и только тех функций f, которые представляются в виде сходящихся к ним в L_p рядов НД. Этот результат инициировал изучение рядов НД [56, 70–72].

Отметим, что в случае $p = \infty$ ситуация значительно изменяется. Как показали П. А. Бородин и О. Н. Косухин [30, 31], в равномерной метрике *каждая* непрерывная на $\mathbb{R}$ функция f с нулевым значением на бесконечности с любой точностью приближается посредством НД.

Предположим, что ряд $\sum_k (x - \xi_k)^{-1}$ сходится в L_p, $p \in (1, \infty)$, к некоторой функции $\rho \in L_p$ (т.е. $\rho \in S_p$). Запишем это в виде

$$\rho(x) = \rho_\infty(x) = \sum\nolimits_k^{(p)} (x - \xi_k)^{-1}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

Ряд (57) сходится к ρ в L_p безусловно [98]. Через $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $y_k > 0$, будем обозначать занумерованные в каком-либо порядке полюсы суммы (57), лежащие в $\mathbb{C}^+$. Если число $m \geqslant 0$ таких полюсов конечно, то для единообразия записей будем считать $z_{m+k} = \infty$ и $(z - z_{m+k})^{-1} \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$. То же будем предполагать относительно полюсов, лежащих в $\mathbb{C}^-$; будем обозначать их через $\widetilde{z}_k = \widetilde{x}_k + i\widetilde{y}_k$. Введем частичные суммы $\rho_n(z) + \widetilde{\rho}_n(z)$, где

$$\rho_n(z) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \quad \widetilde{\rho}_n(z) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{z - \widetilde{z}_k}.$$

и положим $\mu_n = \operatorname{Im} \rho_n$, $\nu_n = \operatorname{Re} \rho_n$, $\widetilde{\mu}_n = \operatorname{Im} \widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\nu}_n = \operatorname{Re} \widetilde{\rho}_n$ (см. (24)). Доказательство основных результатов в [98] основано на преобразовании Гильберта, которое определяется (почти всюду) как [32]

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t-x| \geqslant \varepsilon} \frac{f(t)}{t - x} dt, \qquad f \in L_p, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{58}$$

и на формулах Сохоцкого-Привалова $H(\rho_n) = -i\rho_n$ и $H(\widetilde{\rho}_n) = i\widetilde{\rho}_n$, т.е.

$$H(\nu_n) = \mu_n, \quad H(\mu_n) = -\nu_n, \quad H(\widetilde{\nu}_n) = -\widetilde{\mu}_n, \quad H(\widetilde{\mu}_n) = \widetilde{\nu}_n. \tag{59}$$

Хорошо известно, что оператор $H:\ L_p \to L_p$ при $p \in (1, \infty)$ ограничен, поэтому из (59), в частности, получаются слабые эквивалентности $\|\nu_n\|_p \asymp \|\mu_n\|_p \asymp \|\rho_n\|_p$ (не зависящие от n). Здесь и далее в этом параграфе применяется обозначение $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p}$, $1 < p \leqslant \infty$.

Пусть выполнено (57) при $1 < p < \infty$. Тогда с учетом (59) получим [98]

$$\|\mu_n\|_p \leqslant \|\mu_n - \widetilde{\mu}_n\|_p = \|H(\nu_n + \widetilde{\nu}_n)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant h_p \|\nu_n + \widetilde{\nu}_n\|_p \leqslant h_p \, \|\rho_n + \widetilde{\rho}_n\|_p \to h_p \, \|\rho\|_p, \quad n \to \infty, \tag{60}$$

где h_p — норма оператора Гильберта. Из теоремы Б. Леви следует, что неубывающая последовательность μ_n сходится в L_p к функции μ и $\|\mu\|_p \leqslant h_p \, \|\rho\|_p$. Отсюда и из $\|\nu_n\|_p \asymp \|\mu_n\|_p$ вытекает, что последовательность $\{\nu_n\}$ является фундаментальной в L_p и, значит, сходится к некоторой функции ν, причем $\|\nu\|_p \leqslant h_p^2 \, \|\rho\|_p$. Следовательно, последовательность ρ_n сходится в L_p к функции $\sigma = \mu + i\nu$ и $\|\sigma\|_p \leqslant h_p(1 + h_p)\|\rho\|_p$. Аналогичны рассуждения и оценки для функций со знаком $\widetilde{\ }$.

Здесь важно, что $p < \infty$, поскольку оценка компонент σ и $\widetilde{\sigma}$ через их сумму $\rho = \sigma + \widetilde{\sigma}$ при $p = \infty$ невозможна. Можно утверждать лишь, что (следующая оценка точна по порядку) [49]

$$\|\mu_n\|_\infty \leqslant \mathrm{const} \cdot \ln n \cdot \|\rho_n + \widetilde{\rho}_n\|_\infty. \tag{61}$$

Таким образом, для сходимости (57) необходима и достаточна одновременная сходимость в L_p сумм ρ_n и $\widetilde{\rho}_n$, или ν_n и $\widetilde{\nu}_n$, или μ_n и $\widetilde{\mu}_n$ (то есть одновременная конечность L_p-норм сумм $\mu(x) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(x)$, $\widetilde{\mu}(x) := \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}_n(x)$ знакопостоянных рядов).

Итак, задача аппроксимации в $L_p = L_p(\mathbb{R})$ при конечных p фактически сводится к исследованию сходимости рядов НД в L_p, а последнее значительно облегчается тем, что достаточно изучать ряды, *все полюсы которых лежат в* $\mathbb{C}^+$. Кроме того, в этом случае сходимость (57) равносильна конечности L_p-нормы $\|\mu\|_p$, знакоположительного ряда $\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(x)$. В связи с этим в работе [98] сформулирована задача: *каков критерий сходимости* (57) *в терминах последовательности полюсов* $\{z_k\} \subset \mathbb{C}^+$, *или, что то же самое, каков*

критерий для $\|\mu\|_p<\infty$. (При $p=\infty$ задача о сходимости представляется значительно более сложной из-за того, что вместо (60) можно утверждать лишь (61)). Приведем несколько результатов.

9.2. **Некоторые критерии сходимости рядов НД.** Пусть ρ_n — НД с полюсами $z_k\in\mathbb{C}^+$. При $1<p<3$ имеем следующий критерий сходимости [51]:

$$\|\mu\|_p<\infty \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi(p-2)}{2}}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\rho_n^{p-1}(\overline{z_k})\right)\leqslant A<\infty \quad (\forall n),$$

где $A=A(p,\{z_k\})$ не зависит от n, а суммируются значения однозначной в $\mathbb{C}^-$ аналитической ветви

$$\rho_n^{p-1}(z)=|\rho_n(z)|^{p-1}e^{i\varphi(p-1)},\quad \varphi=\arg\rho_n(z)\in(0,\pi),\quad z\in\mathbb{C}^-.$$

При этом справедлива двусторонняя оценка

$$\|\rho_n\|_p^p\cos\frac{\pi(p-2)}{2}\leqslant 2\pi\operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi(p-2)}{2}}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\rho_n^{p-1}(\overline{z_k})\right)\leqslant\|\rho_n\|_p^p. \tag{62}$$

Наиболее простой вид (62) получается при $1<p<2$:

$$\|\mu\|_p\asymp\sum\nolimits_{k=1}^{n}|\rho_n(\overline{z_k})|^{p-1}. \tag{63}$$

В общем случае, опираясь на (9), можно получить следующий критерий.

Теорема 9.1 [51]. *Условие* $\|\mu\|_p<\infty$ ($\rho_n\to\rho$ *в* L_p) *выполняется тогда и только тогда, когда найдется конечная величина* $A=A(p,\{z_k\})$ *такая, что для любых* $n\in\mathbb{N}$ *и* $g\in H_q$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum\nolimits_{k=1}^{n}g(z_k)\right|\leqslant A\,\|g\|_q \qquad (p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1<p<\infty).$$

9.3. **Некоторые другие условия сходимости.** Пусть выполнено (57) (т.е. $\|\mu\|_p<\infty$, $p\in(1,\infty)$). Из двойственности (9) получаются равномерные относительно $x_0\in\mathbb{R}$ оценки (с величиной $A=A(\|\mu\|_p,p)$, не зависящей от ε и h) [51]:

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}|z_k-x_0+ih|^{-\varepsilon-1/q}\leqslant A\cdot\frac{\varepsilon^{-1/q}}{1-p\varepsilon}\,h^{-\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{p},\ h>0; \tag{64}$$

Отсюда с учетом (4) можно, взяв $h=1$, получить оценку (11). Оценка (64) точна в том смысле, что показатель степени $1/q$ в них нельзя уменьшить. Оценка (64) уточняет (56).

Приведем еще некоторые результаты о сходимости из [51]. Если выполнено (57), то последовательность $\rho_n(x)$ сходится к $\rho(x)$ *равномерно* на $\mathbb{R}$, функция ρ аналитична при $\operatorname{Im}z<A_0(p)\|\rho\|_p^{-q}$ и

$$\|\rho\|_\infty\leqslant A(p)\|\rho\|_p^q,\qquad |\rho'(x)|\leqslant 2\|\rho\|_\infty\cdot\mu(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Кроме того, справедлива эквиваленция

$$\|\mu\|_p<\infty\quad\Leftrightarrow\quad\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty}\mu^p(c_k)<\infty\qquad\forall c_k\in[k,k+1],$$

из которой, в частности, вытекает импликация $\|\mu\|_p<\infty\Rightarrow\|\mu\|_r<\infty$ при $p<r$. Из импликации получаем: $S_p\subset S_r$ при $r>p$.

И. Р. Каюмов в [70, 71] получил необходимое условие для (57) в виде:

$$\|\mu\|_p<\infty\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|z_k^*|^{1-p}<\infty, \tag{65}$$

где z_k^* — последовательность, полученная из z_k путем упорядочивания $|z_k|$ в порядке возрастания. Кроме того, им получено достаточное для (57) условие в виде $\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1} y_k^{1-p} < \infty$, $z_k = x_k + iy_k$, $y_k > 0$, которое в силу (65) оказывается также и необходимым при условии, что y_k упорядочены по возрастанию, а $z_k \in \mathbb{C}^+$ лежат в некотором угле: $|z_k| < c\, y_k$. Отметим, что при выполнении последнего свойства из (63) получается

$$\|\mu\|_p < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{y_k + y_j} \right)^{p-1} < \infty, \qquad p \in (1, 2).$$

10. Модификации НД: h-суммы и амплитудно-частотные операторы

Всюду в этом параграфе через f и h обозначены фиксированные функции, аналитические в окрестности начала координат и имеющие представления

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m, \qquad h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m z^m, \qquad h_m \neq 0. \tag{66}$$

(Условие на коэффициенты h накладывается здесь для простоты изложения; в общем случае достаточно выполнения импликации $f_m \neq 0 \Rightarrow h_m \neq 0$, см. [50]). Кроме того считаем, что h аналитична в круге $D_r := \{z : |z| \leqslant r\}$ с некотором фиксированным $r > 0$.

10.1. **Интерполяция Паде h-суммами, применение в численном анализе.** В работе [50] введены так называемые *h-суммы* вида

$$H_n(z) = H_n(\{\lambda_k\}, h; z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z), \qquad z, \lambda_k \in \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{67}$$

где h — *базисная* функция из (66), $|z| < r \min_{k=1,\dots,n} |\lambda_k|^{-1}$. Если в качестве базисной функции выбрать, например, $h(z) = (z-1)^{-1}$, то h-сумма будет иметь вид НД с полюсами λ_k^{-1} — тем самым h-суммы являются естественным обобщением НД.

В [50] рассматривалась задача Паде-интерполяции

$$f(z) - H_n(z) = O(z^n), \qquad z \to 0, \tag{68}$$

которая, очевидно, обобщает рассмотренную в §6.7. С учетом (66) легко проверить, что (68) равносильно системе уравнений для степенных сумм чисел λ_k:

$$S_{m+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum\nolimits_{k=1}^{n} \lambda_k^{m+1} = s_m, \qquad s_m := f_m / h_m, \quad m = \overline{0, n-1}. \tag{69}$$

Как уже говорилось в §6.1, эта система всегда разрешима, λ_k являются корнями многочлена, построенного как и (43), но с заменой f_m на $(-s_m)$.

В [50, 104] были получены оценки величин $|\lambda_k|$ и $|O(z^n)|$ при определенных ограничениях на числа $|s_m|$ и даны оценки остаточных членов интерполяции. Например, при условиях леммы 6.1 суммы H_n сходятся к f равномерно в любом круге $|z| \leqslant r(1-\delta)\, a^{-1}$, $\delta \in (0, 1)$, причем

$$|H_n(z) - f(z)| \leqslant (\theta\delta)^{-1}(1 - \theta\delta)^n, \qquad \theta \in (0, 1), \qquad n \geqslant n_0.$$

При этом радиус a круга сходимости не может быть увеличен, а число $1 - \theta\delta$ в оценке не может быть заменено числом меньшим $1 - \delta$ (см. [104]).

В дальнейшем h-суммы применялись как операторы численного дифференцирования, интегрирования и экстраполяции на определенных классах аналитических функций [60,101–105]. В этом случае числа λ_k уже не зависят от индивидуальных функций и имеют универсальный характер. Например, в [50] найдены следующие точные на многочленах степени $\leqslant n-1$ формулы численного дифференцирования и интегрирования:

$$zh'(z) \approx -h(z) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{1,k} h(\lambda_{1,k} z); \qquad \int_0^z h(t)\,dt \approx z \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2,k} h(\lambda_{2,k} z). \tag{70}$$

Здесь числа $\lambda_{l,k}$ — абсолютные постоянные, являющиеся корнями многочленов $P_{l,n}$ $(l = 1,2)$, которые можно определить рекуррентно следующим образом. Пусть $P_{l,0} = 1$, $v_{l,1} = -1$ $(l = 1,2)$. Тогда при $k = 1,2,\ldots$ имеем

$$P_{l,k} = \lambda P_{l,k-1} - v_{l,k}, \quad v_{1,k} = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{k}\right) v_{1,j}, \quad v_{2,k} = \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{v_{2,j}}{k(k-j)}.$$

Первая формула из (70) была обобщена в [104] на случай любого порядка дифференцирования. В работах [101–103] рассматривались аппроксимации операторов более общего вида — дифференциальных полиномов. Там показано, что при фиксированном натуральном q и любом натуральном $n > q+5$ существуют комплексные числа λ_k, $|\lambda_k| < 1$, зависящие только от q и n, такие, что имеет место приближенное равенство

$$\sum_{s=1}^{q} p_s h_{q-s} z^{q-s} \approx \sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k)\, h(\lambda_k z), \qquad N := [n/q],$$

где $P = \sum_s p_s \lambda^s$ — произвольный многочлен степени $\leqslant q$. Погрешность формулы имеет порядок $o(n^{-n/q})$, $n \to \infty$, при любом фиксированном z.

Еще одним примером использования h-сумм в численном анализе является метод экстраполяции, предложенный в [60, 105]. Показано, что при $a > 1$ найдется зависящее только от a и n множество $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ со свойством

$$\max_{k=\overline{1,n}} |\lambda_k| \leqslant a - (a-1)n^{-1}, \qquad S_m(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = a^{m-1}, \qquad m = \overline{1,n},$$

откуда для функции h получается *экстраполяционная* формула $h(z) \approx H_n^{(\mu)}(z)$, где $\mu \in \mathbb{N}$ и

$$H_n^{(\mu)}(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_\mu=1}^{n} \lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_\mu} h\left(\tfrac{\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z\right), \quad \left|\tfrac{\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z\right| < \left(1 - \tfrac{a-1}{an}\right)^\mu |z|. \tag{71}$$

(Эта формула является экстраполяционной в том смысле, что значения функции h выражаются через ее значения в точках с меньшими модулями.)

Показано [60, 105], что при определенном r_0, $r_0 < r$, за счет сбалансированного выбора параметров μ и n можно сколь угодно точно экстраполировать значения h на окружность $|z| = r$ из круга $|z| \leqslant r_0$ (т.е. все узлы экстраполяции $\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_\mu} a^{-\mu} z$ лежат в круге $|z| \leqslant r_0$). При этом для остаточного члена $r_n(z) := h(z) - H_n^{(\mu)}(z)$ имеем [105]:

$$r_n(z) = \sum_{m=n}^{\infty} h_m \left(1 - \left(\frac{S_{m+1}}{a^m}\right)^\mu\right) z^m, \qquad |r_n(z)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |h_m||z|^m, \qquad z \in D_r. \tag{72}$$

Заметим еще, что при увеличении μ с фиксированным n радиусы кругов, в которых лежат узлы экстраполяции, стремятся к нулю как геометрическая прогрессия (число узлов, естественно, возрастает), см. (71). Однако оценка погрешности из (72) не ухудшается, т.к. просто не зависит от μ. В [105] приведены примеры, демонстрирующие определенные преимущества указанной экстраполяции перед традиционной интерполяцией (или экстраполяцией) в корнях из единицы.

10.2. **Интерполяция амплитудно-частотными суммами. Регуляризация.** В [8,10,62] предложено естественное обобщение h-сумм — *амплитудно-частотные операторы* (*суммы*) вида

$$\mathcal{H}_n(z) = \mathcal{H}_n(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}, h; z) := \sum_{k=1}^{n} \mu_k h(\lambda_k z), \qquad \mu_k, \lambda_k \in \mathbb{C},$$

где *амплитуды* μ_k и *частоты* λ_k — независимые друг от друга параметры. Как и h-суммы, амплитудно-частотные операторы применялись и для аппроксимации отдельных аналитических функций f (и тогда $\lambda_k = \lambda_k(f, h, n)$, $\mu_k = \mu_k(f, h, n)$), и как специальные операторы (интегрирования, дифференцирования и экстраполяции), действующие на определенном классе (и тогда $\lambda_k = \lambda_k(n)$, $\mu_k = \mu_k(n)$) [8, 10, 62] .

В случае амплитудно-частотных сумм разумно ставить задачу уже $2n$-кратной Паде-интерполяции функции f в точке $z = 0$:

$$f(z) = \mathcal{H}_n(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}, h; z) + O(z^{2n}), \qquad z \to 0, \tag{73}$$

что равносильно выполнению следующих условий на так называемые *обобщенные степенные суммы* (*моменты*) (ср. с (69)):

$$\mathcal{S}_m := \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k^m = s_m, \qquad s_m := f_m/h_m, \qquad m = \overline{0, 2n-1}. \tag{74}$$

Эту систему относительно неизвестных λ_k, μ_k при известных правых частях s_m называют *задачей дискретных моментов*. Проблеме разрешимости этой задачи посвящены классические труды Прони, Сильвестра, Рамануджана и работы многих современных авторов (см. [13, 16, 17, 20, 21, 24]). Эта задача тесно связана с ганкелевыми формами, ортогональными многочленами, квадратурными формулами Гаусса и аппроксимациями Паде.

Следуя [17], назовем совместную систему (74) и ее решение *регулярными*, если все λ_k попарно различны, а все μ_k отличны от нуля. Для решения регулярных систем существует классический метод Прони (см. [16, 17, 24]). В этом случае ключевую роль играет *производящий* многочлен

$$G_n(\lambda) := \sum_{m=0}^{n} g_m \lambda^m = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix}, \tag{75}$$

построенный по числам s_m, $m = \overline{0, 2n-1}$, из (74). Регулярный случай характеризуется тем, что степень многочлена G_n равна n и все его корни попарно различны. Эти корни и дают нужные частоты λ_k. Затем находятся и амплитуды μ_k из линейной относительно них системы (74).

Пример 10.1 . Пусть h — аналитическая в r-окрестности начала функция,

$$f(x) := \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} h(t)\,dt, \qquad 0 \leqslant x < r.$$

Несложно проверить, что в данном случае система (74) регулярна. Ее решение методом Прони позволяет построить оператор $\mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;x)$ численного интегрирования — квадратурную формулу Гаусса

$$f(x) \approx \mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;x),$$

где частоты λ_k вещественны, попарно различны и лежат на интервале $(-1,1)$, а амплитуды μ_k положительны. Хорошо известно (см., например, [90, Гл. 7, §2]), что формулы Гаусса имеют наивысший порядок точности среди всех квадратурных формул порядка n и точны на многочленах степени $2n-1$.

Возник вопрос о построении столь же высокоточных интерполяционных формул для операторов численного дифференцирования и экстраполяции [8]. Однако в этих случаях условия регулярности не выполняются и, более того, для численного дифференцирования соответствующая задача моментов вовсе не имеет решения.

Для преодоления этой трудности в [8] предложен метод аналитической регуляризации задачи $2n$-кратной интерполяции путем добавления к интерполируемой функции f специального бинома вида $b(z) := p\,h_{n-1}z^{n-1} + q\,h_{2n-1}z^{2n-1}$ с тем условием, чтобы для функции $f+b$ задача (74) была регулярной. Тогда метод Прони дает «подправленную» интерполяционную формулу

$$f(z) = -p\,h_{n-1}z^{n-1} - q\,h_{2n-1}z^{2n-1} + \mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z) + O(z^{2n}). \tag{76}$$

В рассматриваемых в [8] приложениях важно, чтобы p и q задавались явными формулами, позволяющими получать оценки амплитуд, частот и остаточных членов интерполяции. Остановимся на этих вопросах подробней.

10.3. **Численное дифференцирование посредством амплитудно-частотных операторов.** Рассмотрим задачу $2n$-кратной интерполяции функции $zh'(z)$ посредством операторов $\mathcal{H}_n$, где в качестве базисной выбрана сама функция h. Мы приходим к нерегулярной задаче дискретных моментов (74), где $s_m = m$. Применим метод регуляризации, взяв

$$q = q_0(p) := -2\,\frac{p\,(3\,p + n^2 - 1)}{(n-1)\,(n-2)}, \qquad p \in \mathbb{C}.$$

Тогда производящий многочлен для $zh'(z) + b(z)$ примет следующий вид

$$G_n(\lambda) = g_n\left(\lambda^n - \frac{6\lambda\,(\lambda^{n-1} - (n-1)\lambda + n - 2)}{(n-1)\,(n-2)\,(\lambda-1)^2} + 2 + \frac{6\,p}{(n-1)\,(n-2)}\right), \tag{77}$$

причем сколь угодно малой вариацией p всегда можно добиться, чтобы все n корней этого многочлена были попарно различны и мы имели регулярный случай. Тем самым, получается формула (76) с $f(z) = zh'(z)$, где частоты λ_k — попарно различные корни многочлена (77), а амплитуды μ_k однозначно определяются по этим корням. Заметим, что $\mu_k = \mu_k(p,n)$ и $\lambda_k = \lambda_k(p,n)$ не зависят от вида аналитической функции h и в этом смысле являются универсальными (в [8] были получены некоторые оценки $|\lambda_k|$, оценки соответствующих амплитуд — вопрос открытый).

Полученная формула численного дифференцирования точна на многочленах степени не выше $2n-1$. При этом требуется знать только n значений функции h и два фиксированных значения ее производных в точке $z=0$. Традиционный интерполяционный подход при таком количестве известных значений позволяет получить, вообще говоря, только порядок $O(z^{n+2})$ (см. [2, 14, 15, 22, 50]).

10.4. **Эстраполяция посредством амплитудно-частотных операторов.** Экстраполяции посредством операторов $\mathcal{H}_n$ улучшает качество экстраполяции h-суммами (см. §10.1). Пусть $a>0$, а h — функция, аналитическая в некотором круге $|z|<r$. Если функцию $h(az)$ интерполировать посредством амплитудно-частотного оператора $\mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z)$ (в качестве базисной выбрана сама h), то, как и в случае дифференцирования, мы получаем нерегулярную задачу моментов с $s_m=a^m$. В [8] показано, что она регуляризуется, например, выбором $p>0$ и $q=0$. При этом производящий многочлен принимает вид

$$G_n(\lambda)=g_n\left(\lambda^n-\frac{a^n}{na^{n-1}+p}\frac{\lambda^n-a^n}{\lambda-a}\right)$$

и всегда имеет n попарно различных корней $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$. Таким образом, при указанных параметрах p и q справедлива интерполяционная формула

$$h(az)=-p\,h_{n-1}z^{n-1}+H_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z)+r_n(z),\qquad r_n(z)=O(z^{2n}),\tag{78}$$

точная на многочленах степени не выше $2n-1$. Здесь, как и в предыдущей задаче, частоты и амплитуды не зависят от h. В (78) для всех частот справедливы неравенства

$$|\lambda_k|<\delta\,a;\qquad \delta:=\big(1+p/(na^{n-1})\big)^{-1/n}<1,$$

т.е. формула (78) является экстраполяционной. При этом для остаточного члена экстраполяции из (78) справедлива следующая, не зависящая от p, оценка

$$|r_n(z)|\leqslant\sum_{m=2n}^{\infty}|f_m||az|^m.$$

Из этого, в свою очередь, вытекает, что теоретическая погрешность экстраполяции не возрастает при изменении параметра p. С другой стороны, в силу свойств величины $\delta=\delta(n,a,p)$ при возрастании p и фиксированных прочих параметрах узлы экстраполяции стягиваются к точке $z=0$ — возникает интересное явление стягивания узлов экстраполяции в одну точку без влияния на оценку погрешности. Аналогичный эффект уже отмечался в сходных задачах для h-сумм [60, 105] (также см. выше §10.1).

В заключение отметим, что обычно при n-точечной простой или кратной экстраполяции на основе многочленов Лагранжа и других сходных аппаратов получаются экстраполяционные формулы, точные на многочленах порядка не выше $n-1$ — см. такие формулы, например, в [23, 60, 105]. Полученные в [8] n-точечные экстраполяционные формулы точны на многочленах порядка $2n-1$, причем удвоение порядка точности достигается за счет введения лишь одного регуляризующего степенного слагаемого $ph_{n-1}z^{n-1}$.

Список литературы

[1] Anderson J. M., Eiderman V. Ya. *Cauchy transforms of point masses: the logarithmic derivative of polynomials.* Ann. of Math., **163**:3 (2006), 1057–1076.

[2] Ash J. M., Janson S., Jones R. L. *Optimal numerical differentiation using N function evaluations.* Calcolo, **21**(2) (1984), 151–169.

[3] Boole G. *On the comparison of transcendents, with certain applications to the theory of definite integrals.* Philos. Trans. R. Soc., **147** (1857), 745—803.

[4] Cartan H. *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications.* Ann. Sci. École Norm. Sup., **45**:3 (1928), 255—346.

[5] Chui C. K. *On approximation in the Bers spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., **40** (1973), 438–442.

[6] Chui C. K., Shen X. C. *Order of approximation by electrostatic fields due to electrons.* Constr. Approx., **1**:1 (1985), 121–135.

[7] Chunaev P. *Least deviation of logarithmic derivatives of algebraic polynomials from zero.* J. Approx. Theory, **185** (2014), 98—106.

[8] Chunaev P. V., Danchenko V. I. *Approximation by the amplitude and frequency operators.* arXiv:1409.4188 (2014).

[9] Danchenko V. I., Danchenko D. Ya. *Nikolskii type inequalities for simple partial fractions.* Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской международной конференции (29 июня - 5 июля 2014 г.) (2014), 33-37.

[10] Danchenko V. I., Chunaev P. V. *Approximation by amplitude and frequency sums*, Joint CRM-ISAAC Conference on Fourier Analysis and Approximation Theory: Abstracts (Bellaterra, 2013) (2013), 12.

[11] Korevaar J. *Limits of polynomials whose zeros lie in a given set.* Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., **11** (1968), 261–272.

[12] Komarov M. A. *On the analog of Chebyshev theorem for simple partial fractions.* Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской международной конференции (Петрозаводск, 29 июня — 5 июля 2014 года) (2014), 65–69.

[13] Kung J. P. S. *Canonical forms of binary forms: Variations on a theme of Sylvester. Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988).* IMA Vol. Math. Appl., **19** (1990), 46–58.

[14] Lyness J. N. *Differentiation formulas for analytic functions.* Math. Comp., **22** (1968), 352–362.

[15] Lyness J. N., Moler C. B. *Numerical differentiation of analytic functions.* SIAM J. Numer. Anal., **4** (1967), 202–210.

[16] Lyubich Y. I. *Gauss type complex quadrature formulae, power moment problem and elliptic curves.* Матем. физ., анал., геом., **9**(2) (2002), 128–145.

[17] Lyubich Y. I. *The Sylvester-Ramanujan system of equations and the complex power moment problem.* Ramanujan J., **8** (2004), 23–45.

[18] Macintyre A. J., Fuchs W. H. J. *Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial.* J. London Math. Soc., **15**:3 (1940), 162–168.

[19] Marstrand J. M. *The distribution of the logarithmic derivative of a polynomial.* J. London Math. Soc., **38** (1963), 495–500.

[20] Prony R. *Sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures.* J. de l'Ecole Polytech., **2**(4) (1795), 28–35.

[21] Ramanujan S. *Note on a set of simultaneous equations.* J. Indian Math. Soc., **4** (1912), 94–96.

[22] Salzer H. E. *Optimal points for numerical differentiation.* Num. Math., **2**:1 (1960), 214–227.

[23] Salzer H. E. *Formulas for best extrapolation.* Num. Math., **18** (1971), 144–153.

[24] Sylvester J. J. *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants.* Phil. Magazine, **2** (1851), 391–410.

[25] Warschawski S. E. *On differentiability at the boundary in conformal mapping.* Proc. Amer. Math. Soc., **12**:4 (1961), 615–620.

[26] Андерсон Дж. М., Эйдерман В. Я. *Оценки преобразования Коши точечных масс (логарифмической производной многочлена).* Докл. РАН, **401**:5 (2005), 583–586.

[27] Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* Наука, М. 1965.

[28] Бари Н. К. *Обобщение неравенства А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **18** (1954), 159–176.

[29] Бородин П. А. *Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах.* Матем. заметки, **82**:6 (2007), 803—810.

[30] Бородин П. А. *Приближение наипростейшими дробями на полуоси.* Матем. сб., **200**:8 (2009), 25–44.

[31] Бородин П. А., Косухин О. Н. *О приближении наипростейшими дробями на действительной оси.* Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех., **1** (2005), 3–8.

[32] Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М., 1984.

[33] Гельфонд А. О. *Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными от логарифмов на действительной оси.* Матем. сб., **71(113)**:3 (1966), 289–296.

[34] Говоров Н. В., Лапенко Ю. П. *Оценки снизу модуля логарифмической производной многочлена.* Матем. заметки, **23**:4 (1978), 527–535.

[35] Горин Е. А. *Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами.* Сиб. матем. журн., **3**:4 (1962), 500–526.

[36] Гончар А. А. *О наилучших приближениях рациональными функциями.* Докл. АН СССР, **100**:2 (1955), 205—208.

[37] Гончар А. А. *Обратные теоремы о наилучших приближениях на замкнутых множествах.* Докл. АН СССР, **128**:1 (1959), 25—28.

[38] Гончар А. А. *Обратные теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **25**:3 (1961), 347–356.

[39] Гончар А. А. *О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями.* Матем. сб., **78(120)**:4 (1969), 640—654.

[40] Гончар А. А., Григорян Л. Д. *Об оценках норм голоморфной составляющей мероморфной функции.* Матем. сб., **99(141)**:4 (1976), 634–638.

[41] Гончар А. А., Григорян Л. Д. *Об оценке компонент ограниченных аналитических функций.* Матем. сб., **132(174)**:3 (1987), 299–303.

[42] Григорян Л. Д. *Оценка нормы голоморфных составляющих мероморфных функций в областях с гладкой границей.* Матем. сб., **100(142)**:1(5) (1976), 156—164.

[43] Данченко В. И. *О разделении особенностей мероморфных функций.* Матем. сб., **125(167)**:2(10) (1984), 181–198.

[44] Данченко В. И. *Оценки отклонения от действительной оси нулей многочлена с нормированной логарифмической производной.* Деп. ВИНИТИ, № 2990-91 (1991), 1–21.

[45] Данченко В. И. *Оценки мнимых частей полюсов логарифмических производных многочленов.* Деп. ВИНИТИ, № 1695-92 (1992), 1-19.

[46] Данченко В. И. *О скорости приближения к действительной оси полюсов нормированных логарифмических производных полиномов.* Докл. РАН, **330**:1 (1993), 15–16.

[47] Данченко В. И. *Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей.* Матем. сб., **185**:8 (1994), 63–80.

[48] Данченко В. И. *Метрические свойства мероморфных функций. Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук.* МГУ, М., 1999.

[49] Данченко В. И. *Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы.* Матем. сб., **197**:4 (2006), 33–52.

[50] Данченко В. И. *Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$.* Матем. заметки, **83**:5 (2008), 643–649.

[51] Данченко В. И. *О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$.* Матем. сб., **201**:7 (2010), 53–66.

[52] Данченко В. И. *Интегральные оценки длин линий уровня рациональных функций и задача Е. И. Золотарева.* Матем. заметки, **94**:3 (2013), 331–337.

[53] Данченко В. И., Данченко Д. Я. *О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов.* Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы школы-конференции, посвященной 130-летию Д. Ф. Егорова (Казань, 1999) (1999), 74-77.

[54] Данченко В. И., Данченко Д. Я. *О приближении наипростейшими дробями.* Матем. заметки, **70**:4 (2001), 553–559.

[55] Данченко В. И., Данченко Д. Я. *О единственности наипростейшей дроби наилучшего приближения.* Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010): Тезисы докладов (2010), 71-72.

[56] Данченко В. И., Додонов А. Е. *Оценки экспоненциальных сумм. Приложения.* Проблемы матем. анализа **67** (2012), 23–30; англ. перев.: Danchenko V. I., Dodonov A. E. *Estimates for exponential sums. Applications.* J. Math. Sci., **188**:3 (2013), 197–206.

[57] Данченко В. И., Додонов А. Е. *Оценки L_p-норм наипростейших дробей.* Изв. вузов. Матем., **6** (2014), 9–19.

[58] Данченко В. И., Кондакова Е. Н. *Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями.* Тр. МИАН, **270** (2010), 86–96.

[59] Данченко В. И., Кондакова Е. Н. *Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями.* Тр. МИАН, **278** (2012), 49–58.

[60] Данченко В. И., Чунаев П. В. Об аппроксимации наипростейшими дробями и их обобщениями, Проблемы матем. анализа **58** (2011), 121–134; англ. перев.: Danchenko V. I., Chunaev P. V. *Approximation by simple partial fractions and their generalizations.* J. Math. Sci., **176**:6 (2011), 844–859.

[61] Данченко В. И., Чунаев П. В. *Об оценке мнимых частей полюсов наипростейших дробей с нормированной производной на действительной оси.* Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы (2013), 78.

[62] Данченко В. И., Чунаев П. В. *Об аппроксимации посредством частотно-амплитудных сумм.* Международная Казанская летняя школа-конференция (Казань, 22-28 август 2013 г.). Теория функций, ее приложения и смежные вопросы **46** (2013), 174-175.

[63] Данченко Д. Я. *Некоторые вопросы аппроксимации и интерполяции рациональными функциями. Приложение к уравнениям эллиптического типа. Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук.* Владимирский государственный педагогический ун-т (2001).

[64] Долженко Е. П. *Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций.* Матем. сб., **56(98)**:4 (1962), 403–432.

[65] Долженко Е. П. *Рациональные аппроксимации и граничные свойства аналитических функций.* Матем. сб., **69(111)**:4 (1966), 497–524.

[66] Долженко Е. П. *О зависимости граничных свойств аналитической функции от скорости ее приближения рациональными функциями.* Матем. сб., **103(145)**:1(5) (1977), 131–142.

[67] Долженко Е. П. *Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения.* Anal. Math., **4**:4 (1978), 247—268.

[68] Золотарев Е. И. *Полное собрание сочинений. Вып. 2.* Физ.-мат. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР., Изд-во АН СССР, Л., 1932.

[69] Кацнельсон В. Э. *О некоторых операторах, действующих в пространствах, порожденных функциями $\frac{1}{z-z_k}$.* Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **4** (1967), 58–66.

[70] Каюмов И. Р. *Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$.* Матем. сб., **202**:10 (2011), 87–98.

[71] Каюмов И. Р. *Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$.* Матем. заметки, **92**:1 (2012), 149–152.

[72] Каюмов И. Р. *Интегральные оценки наипростейших дробей.* Изв. вузов. Матем., **4** (2012), 33–45.

[73] Каюмова А. В. *Сходимость рядов простых дробей в L_p.* Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, **154**:1 (2012), 208–213.

[74] Комаров М. А. *К задаче о единственности наипростейшей дроби наилучшего приближения.* Пробл. матем. анализа, **56** (2011), 63–82; англ. перев.: Komarov M. A. *Uniqueness of a simple partial fraction of best approximation.* J. Math. Sci., **175:**3 (2011), 284–308.

[75] Комаров М. А. *Примеры, связанные с наилучшим приближением наипростейшими дробями.* Пробл. матем. анализа, **65** (2012), 119–131; англ. перев.: Komarov M. A.

Examples related to best approximation by simple partial fractions. J. Math. Sci., **184**:4 (2012), 509–523.

[76] Комаров М. А. *Интерполяция рациональных функций наипростейшими дробями.* Пробл. матем. анализа, **63** (2012), 55–66; англ. перев.: Komarov M. A. *Interpolation of rational functions by simple partial fractions.* J. Math. Sci., **181**:5 (2012), 600–612.

[77] Комаров М. А. *О достаточном признаке наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями.* Пробл. матем. анализа, **68** (2013), 133–139; англ. перев.: Komarov M. A. *Sufficient condition for the best uniform approximation by simple partial fractions.* J. Math. Sci., **189**:3 (2013), 482–489.

[78] Комаров М. А. *О неединственности наипростейшей дроби наилучшего равномерного приближения.* Изв. вузов. Матем., **9** (2013), 28–37.

[79] Комаров М. А. *Критерий наилучшего приближения констант наипростейшими дробями.* Матем. заметки, **93**:2 (2013), 209–215.

[80] Комаров М. А. *Критерий разрешимости задачи кратной интерполяции посредством наипростейших дробей.* Сиб. матем. журн., **55**:4 (2014), 750–763.

[81] Комаров М. А. *Критерий наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями в терминах альтернанса.* Изв. РАН. Сер. матем., **79**:3 (2015), 3–22.

[82] Комаров М. А. *Скорость наилучшего приближения констант наипростейшими дробями и альтернанс.* Матем. заметки, **97**:5 (2015), 718–732.

[83] Комаров М. А. *Об аналоге условия Хаара для наипростейших дробей.* Проблемы матем. анализа, **80** (2015), 25–30; англ. перев.: Komarov M. A. *An Analog of the Haar Condition for Simple Partial Fractions.* J. Math. Sci., **208**:2 (2015), 174–180.

[84] Кондакова Е. Н. *Интерполяция наипростейшими дробями.* Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **9**:2 (2009), 30—37.

[85] Кондакова Е. Н., *Особые случаи интерполяции посредством наипростейших дробей.* Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010): Тезисы докладов (2010), 105-106.

[86] Кондакова Е. Н., *Интерполяция и аппроксимация наипростейшими дробями: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук*, Саратов (2012).

[87] Косухин О. Н. *Об аппроксимативных свойствах наипростейших дробей.* Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех., **4** (2001), 54–58.

[88] Косухин О. Н. *О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами: Дисс....канд. физ.-мат. наук.* МГУ, М., 2005.

[89] Косухин О. Н. *Об оценках расстояний от полюсов наипростейших дробей до компактов.* Материалы Международной научной конф., посв. 105-летию акад. С. М. Никольского (МГУ им. М. В. Ломоносова (17-19 мая 2010 г.)), МГУ, М., (2010) 25.

[90] Крылов В. И. *Приближенное вычисление интегралов.* Наука, М., 1967.

[91] Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* Физматлит, М., 1963.

[92] Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p.* Мир, М., 1984.

[93] Минк Х. *Перманенты.* Мир, М. 1982.

[94] Николаев Е. Г. *Геометрическое свойство корней многочленов.* Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех., **5** (1965), 23–26.

[95] Никольский С. Н. *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных.* Тр. МИАН, **38** (1951), 244–278.

[96] Новак Я. В. *О наилучшем локальном приближении наипростейшими дробями.* Матем. заметки, **84**:6 (2008), 882–887.

[97] Новак Я. В. *Апроксимаційні та інтерполяційні властивості найпростіших дробів. Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук.* ИМ НАН Украины, Киев, 2009.

[98] Протасов В. Ю. *Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта.* Изв. РАН. Сер. матем., **73**:2 (2009), 123–140.

[99] Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* Физматгиз, М., 1960.

[100] Уолш Д. Л. *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* М., 1961.

[101] Фрянцев А. В. *О численной аппроксимации дифференциальных полиномов.* Современные методы теории функций и смежные проблемы, Труды воронежской зимней матем. школы (27.01-2.02, 2007) (2007), 233-234.

[102] Фрянцев А. В. *О численной аппроксимации дифференциальных полиномов.* Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **7**:2 (2007), 39–43.

[103] Фрянцев А. В. *О полиномиальных решениях линейных дифференциальных уравнений.* Успехи математ. наук, **63**:3 (2008), 149–150.

[104] Чунаев П. В. *Об одном нетрадиционном методе аппроксимации.* Тр. МИАН, **270** (2010), 281–287.

[105] Чунаев П. В. *Об экстраполяции аналитических функций суммами вида* $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$. Матем. заметки, **92**:5 (2012), 794–797.

[106] Эйдерман В. Я. *Оценки картановского типа для потенциалов с ядром Коши и с действительными ядрами.* Матем. сб., **198**:8 (2007), 115—160.

EXTREMAL AND APPROXIMATION PROPERTIES OF SIMPLE PARTIAL FRACTIONS

V. I. DANCHENKO, M. A. KOMAROV, P. V. CHUNAEV

Abstract. In approximation theory, logarithmic derivatives of complex polynomials are called *simple partial fractions* (*SPF*) as suggested by Eu. P. Dolzhenko. Many solved and unsolved extremal problems, related to SPF, are traced back to works of G. Boole, A. J. Macintyre, W. H. J. Fuchs, M. Marstrand, E. A. Gorin, A. A. Gonchar, Eu. P. Dolzhenko. At present, many authors systematically develop methods of approximation and interpolation by SPF and several their modifications. Simultaneously, related problems appear for SPF: inequalities of different metrics, estimation of derivatives, separation of singularities, etc., being of independent interest.

We systematize such problems, known to us, to some extent in Introduction of this survey. In the main part, we formulate principal results and outline methods for their proofs if possible.